ある幾何学的発展方程式に従う 無限の長さをもつ平面曲線の挙動

岡部 真也　（東北大学大学院理学研究科）

1　導入

幾何学的な意味を持つ汎函数に対する最急降下方程式, 所謂, 幾何学的発展方程式についてはこれまで様々な研究がなされてきた. 曲線の場合には, 例えば, 曲線に対する平均曲率流として知られる curve shortening flow ([1], [4], [5] など), 曲率の二乗積分によって定義される汎函数 (total squared curvature) に対する勾配流である curve straightening flow などがよく知られている. curve straightening flow については, 長さ一定の束縛条件付きの場合 ([7], [13], [14] など), 非伸縮の束縛条件付きの場合 ([6], [10] など) に関する結果が得られている. ただし, 上記はすべて, 長さ有限の閉曲線に関する結果であることに注意されたい.

まず, 本講演で扱う幾何学的汎函数について述べておく. 以下, $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を平面曲線とし, κ と s をそれぞれ γ の曲率と弧長パラメータとする. 平面曲線 γ に対して次の幾何学的汎函数を定義する:

$$E(\gamma) = \lambda^2 \mathscr{L}(\gamma) + \mathscr{E}(\gamma). \tag{1.1}$$

ただし,

$$\mathscr{L}(\gamma) = \int_\gamma ds, \qquad \mathscr{E}(\gamma) = \int_\gamma \kappa^2\, ds$$

であって λ は与えられた定数とする. 汎函数 (1.1) に対する最急降下方程式は次のように導出されることが知られている:

$$\partial_t \gamma = (-2\partial_s^2 \kappa - \kappa^3 + \lambda^2 \kappa)\boldsymbol{\nu}. \tag{1.2}$$

ここで, $\boldsymbol{\nu}$ は γ の内向き単位法線ベクトルである. 汎函数 $\mathscr{L}(\gamma)$ は曲線 γ の長さを与え, この汎函数に関する幾何学的発展方程式が上述した curve shortening flow である. また, 汎函数 $\mathscr{E}$ が同じく上で述べた total squared curvature である. 汎函数 $\mathscr{E}$ は 1 次元 Willmore 汎

函数ともよばれ, 汎函数 $\mathscr{E}$ に対する幾何学的発展方程式が curve straightening flow である. このような背景の下, 本講演では幾何学的発展方程式 (1.2) を shortening-straightening flow とよぶこととする.

方程式 (1.2) については以下のような先行結果が知られている. まず, 1996 年に A. Polden ([11]) によって, 初期曲線が有限の長さをもつ滑らかな平面閉曲線である場合に, 方程式 (1.2) の古典解が時間大域的に存在することが示された. また, その解は時間に関する部分列にそってある定常解へと収束することも証明されている. そして, 2002 年に G. Dziuk, E. Kuwert, and R. Schätzle ([3]) によって Polden の結果は有限の長さをもつ空間閉曲線へと拡張された.

これら先行結果に対して, 本講演では次のような問題を考える:

問題 1.1. 方程式 (1.2) に支配される無限の長さをもつ平面非閉曲線のダイナミクスはどのようなものか？

2 主結果

問題 1.1 に関して, 具体的には次の初期値問題を考える:

$$\text{(SS)} \qquad \begin{cases} \partial_t \gamma = (-2\partial_s^2 \kappa - \kappa^3 + \lambda^2 \kappa)\boldsymbol{\nu}, \\ \gamma(x,0) = \gamma_0(x). \end{cases}$$

ここで, 初期曲線 $\gamma_0(x) = (\phi_0(x), \psi_0(x)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ は滑らかな平面非閉曲線とし, 以下をみたすとする:

$$\text{(A1)} \qquad \left|\gamma_0{}'(x)\right| \equiv 1,$$

$$\text{(A2)} \qquad \partial_x^m \kappa_0 \in L^2(\mathbb{R}) \quad \text{for all } \; m \geq 0,$$

$$\text{(A3)} \qquad \lim_{x\to\infty} \phi_0(x) = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} \phi_0(x) = -\infty, \quad \lim_{|x|\to\infty} \phi_0'(x) = 1,$$

$$\text{(A4)} \qquad \psi_0(x) = O(x^{-\alpha}) \text{ for some } \alpha > \frac{1}{2} \text{ as } |x| \to \infty, \quad \psi_0' \in L^2(\mathbb{R}).$$

条件 (A1) と γ_0 の定義より γ_0 は無限の長さをもつことがわかる. また, 条件 (A2)–(A4) から, 初期曲線 γ_0 は自己交差を起こす点があってもよいが, $|x| \to \infty$ とするときには直線に C^1 の意味で限りなく近づくことが従う（詳しくは (3.3) を参照されたい）. このとき, 初期値問題 (SS) について次の結果を得る:

定理 2.1. 平面曲線 $\gamma_0(x)$ は滑らかであり, 条件 (A1)–(A4) をみたすとする. このとき, 問題 (SS) をみたす滑らかな平面曲線族 $\gamma(x,t) : \mathbb{R} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^2$ が存在する. さらに, 解 $\gamma(x,t)$ は以下をみたす:

(i) 時間変数 t に依らない正定数 K が存在し, 任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して

$$\max\left\{\|\partial_s^n \kappa(t)\|_{L_s^2},\quad \left\|\partial_s^{n+2}\gamma(t)\right\|_{L_s^2},\quad \|\partial_s^n \kappa(t)\|_{L_s^\infty},\quad \left\|\partial_s^{n+2}\gamma(t)\right\|_{L_s^\infty}\right\} < K \tag{2.1}$$

となる.

(ii) $\mathbf{e} = (0,1)$ とする. $|x| \to \infty$ とするとき, 任意の $t > 0$ に対して

$$|\gamma(x,t)| \to \infty,\quad \gamma(x,t)\cdot \mathbf{e} \to 0,\quad \partial_x \gamma(x,t)\cdot \mathbf{e} \to 0 \tag{2.2}$$

となる.

ここで, $\|\cdot\|_{L_s^p}$ は弧長パラメータに関する L^p ノルムを表す.

注意 2.1. 定理 2.1 では解の存在が示されたわけだが, 解の一意性は得られていない. 解の一意性が失われる要因は, 解の存在を示す際に Ascoli-Arzelà の定理を用いていることにある. 解の一意性については未だ解決されていない.

定理 2.1 により解がある定常解へと収束することが証明された. 次に, 収束先となる定常解に関して次のような結果を得た:

定理 2.2. 曲線族 $\gamma(x,t) : \mathbb{R} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^2$ を定理 2.1 によってえられた初期値問題 (SS) の解とする. このとき, 列 $\{t_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathbb{R}$, $\{p_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathbb{R}^2$ と滑らかな曲線 $\hat{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ が存在し, $t_j \to \infty$ とするとき, $\gamma(\cdot,t_j) - p_j$ は $\hat{\gamma}(\cdot)$ に収束する. また, 曲線 $\hat{\gamma}$ とその曲率 $\hat{\kappa}$ は以下をみたす:

$$\lim_{|x|\to\infty} |\hat{\gamma}(x)| = \infty, \tag{2.3}$$

$$2\partial_s^2 \hat{\kappa} + \hat{\kappa}^3 - \lambda^2 \hat{\kappa} = 0, \tag{2.4}$$

$$\int_{\hat{\gamma}} \hat{\kappa}^2\, ds < \infty. \tag{2.5}$$

さらに $\hat{\kappa}$ は

$$\hat{\kappa} \equiv 0 \tag{2.6}$$

であるかまたは, ある $s_0 \in \mathbb{R}$ に対して

$$\hat{\kappa}(s) = \begin{cases} k(s - s_0) & \mathit{for} \quad s > s_0, \\ k(-s + s_0) & \mathit{for} \quad s < s_0 \end{cases} \tag{2.7}$$

をみたす. ただし, $k(s)$ は

$$\begin{cases} \dfrac{dk}{ds} = -\sqrt{-\dfrac{k^4}{4} + \dfrac{\lambda^2}{2}k^2} \quad for \quad s \in \mathbb{R}, \\ k(0) = \sqrt{2}|\lambda|, \end{cases} \tag{2.8}$$

または

$$\begin{cases} \dfrac{dk}{ds} = \sqrt{-\dfrac{k^4}{4} + \dfrac{\lambda^2}{2}k^2} \quad for \quad s \in \mathbb{R}, \\ k(0) = -\sqrt{2}|\lambda|, \end{cases} \tag{2.9}$$

いずれかの解である.

定理 2.2 は定理 2.1 によって得られた解が, 適当な平行移動のもとである定常解へと収束することを意味している. さらに, その定常解は直線であるか, または (2.7)–(2.9) によって与えられる非自明な定常解であることも従う. (2.7)–(2.9) によって与えられる曲線は borderline elastica とよばれものである ([12]). 概形については図 1 を参照されたい.

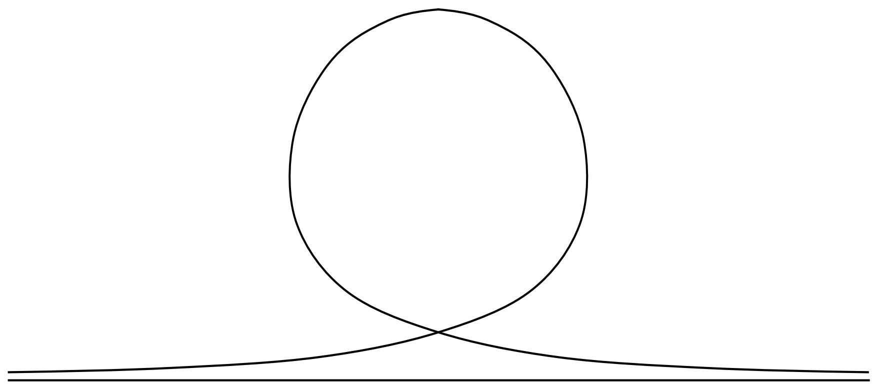

図 1: borderline elastica の概形

3　証明の概略

以下, 定理 2.1 の証明の概略について述べる. その詳細および定理 2.2 の証明については論文 [9] を参照されたい.

定理 2.1 の証明の概略を述べる前に我々の問題の難点にふれておく. 一般的に, 汎函数に対する勾配流方程式が時間大域的に解けることを示すためには, 初期状態における汎函数の有界性が必要である. そうであれば, 短時間解の存在を示した後に, エネルギー法を用いて任意有限時間における解の存在を証明することが可能となる. しかしながら, 本講演で扱う汎函数 (1.1) は長さ汎函数 $\mathscr{L}$ を含むため, 初期曲線に関する汎函数は非有界である. すなわち, 問題 1.1 には「非有界なエネルギー汎函数に対する勾配流を構成する」という難点がある.

この困難を解決するために, まず長さが有限な場合について解を構成する. 初期曲線として, 長さが有限な滑らかな平面曲線 $\Gamma_0(x) : [0,L] \to \mathbb{R}^2$ をとる. 以下, その曲率を $k_0(x)$ と表す. また, $\Gamma_0(x)$ は以下をみたすとする:

$$(3.1) \qquad \left|\Gamma_0{}'(x)\right| \equiv 1, \quad \Gamma_0(0) = (0,0), \quad \Gamma_0(L) = (R,0), \quad k_0(0) = k_0(L) = 0.$$

ただし, $L > 0$ と $R > 0$ はある正定数とする. このとき, 次のような初期値境界値問題を考える:

$$(\mathrm{CSS}) \qquad \begin{cases} \partial_t \gamma = (-2\partial_s^2 \kappa - \kappa^3 + \lambda^2 \kappa)\boldsymbol{\nu}, \\ \gamma(0,t) = (0,0), \quad \gamma(L,t) = (R,0), \quad \kappa(0,t) = \kappa(L,t) = 0, \\ \gamma(x,0) = \Gamma_0(x). \end{cases}$$

この問題 (CSS) について次のような結果を得る:

定理 3.1. 滑らかな平面曲線 Γ_0 は条件 (3.1) をみたすとする. このとき, 任意の時間 $t > 0$ に対して問題 (CSS) の古典解が一意に存在する.

まず, 時間局所解の存在の証明についてであるが, 閉曲線の場合については前述した Polden ([11]) による結果が得られている. しかしながら, Polden による証明が難解であることと閉曲線の特徴をかなり用いているため, 我々の場合に直接適用することは困難と思われる. 我々は, 解析的半群, 最大正則性定理, および補間空間を用いて

$$C([0,T]; h_B^{4+4\theta}([0,L])) \cap C^1([0,T]; h_B^{4\theta}([0,L]))$$

において解を構成した. ここで, $0 < \theta < 1/4$ であり, h_B^α は次で定義される little Hölder 空間を表す:

$$(3.2) \qquad h_B^\alpha([0,L]) = \begin{cases} \{u \in h^\alpha([0,L]) \mid u(0) = u(L) = u''(0) = u''(L) = 0\} & \text{if} \quad \alpha > 2, \\ \{u \in h^\alpha([0,L]) \mid u(0) = u(L) = 0\} & \text{if} \quad 0 < \alpha < 2. \end{cases}$$

解が時間大域的に存在することの証明は, 曲線が伸縮することから弧長パラメータの扱いに注意が必要であるが, 標準的なエネルギー法を用いることにより証明することができる. 問題 (CSS) の解がある定常解へと収束することも証明できるが, ここでは省略する.

定理 3.1 を利用して目的の解を構成する. 前述した条件 (A1)–(A4) をみたす滑らかな初期曲線 $\gamma_0(x)$ をとる. 条件 (A2)-(A3) より, 十分小さな $\rho > 0$ に対して, ある定数 $M > 0$ が存在し次が成り立つことに注意されたい:

$$\sup_{|x|\in(M,\infty)} \left| \left|\phi_0'(x)\right| - 1 \right| < \rho, \qquad \sup_{|x|\in(M,\infty)} |\psi_0(x)| < \rho, \qquad \sup_{|x|\in(M,\infty)} \left|\psi_0'(x)\right| < \rho. \tag{3.3}$$

ここで次のような cut off function $\eta_r(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ を考える:

$$\begin{aligned} \eta_r(x) = 1 \quad &\text{for} \quad \text{any} \quad |x| \in [0, r-1], \\ 0 < \eta_r(x) < 1 \quad &\text{for} \quad \text{any} \quad |x| \in (r-1, r), \\ \eta_r(x) = 0 \quad &\text{for} \quad \text{any} \quad |x| \in [r, +\infty). \end{aligned}$$

この函数 η_r と初期曲線 γ_0 を用いて新たに曲線 $\Gamma_{0,r} : [-r, r] \to \mathbb{R}^2$ を次のように定める:

$$\Gamma_{0,r}(x) = (\phi_0(x), \eta_r(x)\psi_0(x)) \Big|_{x\in[-r,r]}.$$

ここで次のような初期値境界値問題を解く:

$$(\mathrm{SS}_r) \qquad \begin{cases} \partial_t \gamma = (\lambda^2\kappa - 2\partial_s^2\kappa - \kappa^3)\nu, \\ \gamma(-r,t) = (\phi_0(-r), 0), \quad \gamma(r,t) = (\phi(r), 0), \quad \kappa(-r,t) = \kappa(r,t) = 0, \\ \gamma(x,0) = \Gamma_{0,r}(x). \end{cases}$$

定理 3.1 を用いることで, 問題 (SS_r) について次が得られる:

補題 3.1. $r > M$ とする. このとき, 任意の時間 $t > 0$ に対して問題 (SS_r) の古典解が一意に存在する.

各 $r > M$ に対して補題 3.1 から得られる解を用いて構成した平面閉曲線族を $\{\gamma_r\}_{r>M}$ と表す. この族 $\{\gamma_r\}_{r>M}$ に対して Ascoli-Arzelà の定理を適用することにより, 定理 2.1 の証明が完了する. その際には, もちろん, γ_r の曲率およびその導関数について r に関する一様有界性と同程度連続性を示す必要があるのだが, より本質的であるのは一様有界性である. 特に示すべきは次の補題である:

補題 3.2. 曲線 γ_r の曲率を κ_r と表す. このとき, $r > M$ に依らない定数 $C > 0$ が存在し任意の $t > 0$ に対して次が成り立つ:

$$\sup_{r\in(M,\infty)} \|\kappa_r(t)\|_{L_s^2} < C \tag{3.4}$$

補題 3.2 が従えば, エネルギー法と同様の手順により曲率の任意階の導関数について r に関する一様有界性を得ることができる. また, 補題 3.2 は各 γ_r の弾性エネルギーが r に依らず有界であることを示唆している. この事実が, 定理 2.2 において収束先を選定する上で重要な役割を果たすこととなる.

謝辞. この度, 第 1 回室蘭連続講演会にお招き戴くとともに談話会における講演の機会も与えてくださった高坂良史先生, 黒木場正城先生, 加藤正和先生, 高橋雅朋先生にこの場をかりて厚く御礼申し上げたい.

参考文献

[1] S. B. Angenent, *On the formation of singularities in the curve shortening flow*, J. Differential Geom. **33** (1991), no. 3, 601–633.

[2] G. Bellettini, C. Mantegazza, and M. Novaga, *Singular perturbations of mean curvature flow*, J. Differential Geom. **75** (2007), 403–431.

[3] G. Dziuk, E. Kuwert, and R. Schätzle, *Evolution of elastic curves in* $\mathbb{R}^n$*: existence and computation*, SIAM J. Math. Anal. **33** (2002), 1228–1245.

[4] M. E. Gage, *Curve shortening makes convex curves circular*, Invent. Math. **76** (1984), no. 2, 357–364.

[5] M. A. Grayson, *The shape of a figure-eight under the curve shortening flow*, Invent. Math. **96** (1989), no. 1, 177–180.

[6] N. Koiso, *On the motion of a curve towards elastica*, Acta de la Table Ronde de Géométrie Différentielle, (1996), 403–436, Sémin. Congr. 1, Soc. Math. France, Paris.

[7] A. Linnér, *Some properties of the curve straightening flow in the plane*, Trans. Amer. Math. Soc. **314** (1989), no. 2, 605–618.

[8] A. Lunardi, *Analytic Semigroup and Optimal Regularity in Parabolic Problems*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications **16** (1995), Birkhäuser.

[9] M. Novaga and S. Okabe, *Curve shortening-straightening flow for non-closed planar curves with infinite length* , submitted.

[10] S. Okabe, *The motion of elastic planar closed curves under the area-preserving condition*, Indiana Univ. Math. J. **56** (2007), no. 4, 1871–1912.

[11] A. Polden, *Curves and Surfaces of Least Total Curvature And Fourth-Order Flows*, Dissertation University of Tuebingen (1996).

[12] D.A. Singer, *Lectures on Elastic Curves and Rods* (2007).

[13] Y. Wen, *L^2 flow of curve straightening in the plane*, Duke Math. J. **70** (1993), no. 3, 683–698.

[14] Y. Wen, *Curve straightening flow deforms closed plane curves with nonzero rotation number to circles*, J. Differential Equations **120** (1995), no. 1, 89–107.