高次元空間形内のKirchhoff弾性棒*

福岡大学理学部　川久保 哲

Abstract

We investigate Kirchhoff elastic rods in space forms of dimension greater than or equal to four. In particular, we show that there exist fully immersed Kirchhoff elastic rods in five-dimensional space forms whose centerlines are not helices.

1　序

一次元弾性体 (例えばピアノ線のような弾性の強い針金) の数学的モデルについては，18 世紀以来，様々な観点から多くの研究がなされてきている ([1],[12],etc.)．弾性曲線や Kirchhoff 弾性棒はこのようなモデルの代表的なものである．弾性曲線は曲げの効果のみを考えた，最も簡単なモデルで，曲げエネルギー (Frenet 第 1 曲率の 2 乗の積分) が臨界になる曲線として定義される．一方，Kirchhoff 弾性棒は，曲げと捩れの両方の効果を考えたモデルであり，弾性曲線の一般化になっている．

弾性曲線やKirchhoff弾性棒は，一般のRiemann多様体内で考えることができるが，本稿では n 次元空間形 $\mathscr{M}^n = \boldsymbol{R}^n, S^n, H^n$ 内のKirchhoff弾性棒を扱う．特に，高次元 ($n \geq 4$) の場合に得られた結果について紹介する．$n = 2, 3$ の時のKirchhoff弾性棒については，多くの研究がなされており ([5],[6],[4],etc.)，例えば，全ての Kirchhoff 弾性棒は Jacobi の sn 関数と楕円積分を用いて陽に表示できることが知られている ([11],[13],[14],[7])．一方，$n \geq 4$ の時は，このような表示式を得ることは非常に困難であり，それどころか，曲率の表示式を得ることも難しい問題である．

そこで，全ての解を求めることは諦め，特別な解をなるべく具体的に構成することを問題にする．$n \geq 4$ の時の Kirchhoff 弾性棒の研究は少ないが，[8] において，中心曲線が充満な Kirchhoff 弾性棒の例が構成されている．一方，充満な弾性曲線は存在しないことが知られているので ([10])，この事は弾性曲線と Kirchhoff 弾性棒の幾何的性質が大きく異なることを示している．

しかしながら，[8] で構成された例は螺旋 (即ち全ての高次 Frenet 曲率が定数関数であるような曲線) であり，曲線そのものとしてはよく知られたものであると言える．そ

*室蘭連続講演会 (2012 年 1 月 11〜13 日) での講演を基に作成．

こで，Kirchhoff 弾性棒で，中心曲線が充満かつ螺旋でないものは存在するか，という問題が考えられる．本稿では，このことに関して次の結果が得られたことを報告する．

定理 1. $\mathscr{M}^5 = \boldsymbol{R}^5, S^5, H^5$ とする．$\mathscr{M}^5$ 内の Kirchhoff 弾性棒 $\{\gamma, M\}$ で，中心曲線 γ が次の (i)〜(iii) を全て満たすようなものが無限個存在する．
(i) 充満である．　(ii) 螺旋ではない．　(iii) γ の自然曲率は sn 関数で表せる．

2　Kirchhoff弾性棒の定義

ここでは，Kirchhoff弾性棒の定義を述べる．$\mathscr{M}^n$ を n 次元空間形 $\boldsymbol{R}^n, S^n, H^n$ $(n \geq 3)$ とし，断面曲率を G とする．$\langle *, * \rangle$ で $\mathscr{M}^n$ の Riemann 計量，$|*|$ でノルムを表す．以下，特に断りがない限り，曲線，ベクトル場等はすべて C^∞ 級とする．

$\gamma = \gamma(t) : [t_1, t_2] \to \mathscr{M}^n$ を弧長径数の (即ち速さが 1 の) 曲線とし，$T(t) = \gamma'(t)$ で γ の接ベクトル，∇ で $\mathscr{M}^n$ の Levi-Civita 接続を表す．曲線 γ のみではピアノ線の捩れ方を表せないので，次のようなものを導入する．$M = (M_1, M_2, \ldots, M_{n-1})$ を，γ に沿った法束 $T^\perp \mathscr{M}^n$ の正規直交枠場とする．(従って，各 t に対して $(T(t), M_1(t), M_2(t), \ldots, M_{n-1}(t))$ は接空間 $T_{\gamma(t)}\mathscr{M}^n$ の正規直交枠である．) このような γ と M の組 $\{\gamma, M\}$ を適合枠付き弧長径数曲線とよび，これによってピアノ線の形態を表す．γ を $\{\gamma, M\}$ の中心曲線とよぶ．

$\nu > 0$ をピアノ線の材質により決まる定数とし，曲げと捩れの両方の効果を考えたエネルギー汎関数 $\mathfrak{T}$ を次のように定義する．

$$\mathfrak{T}(\{\gamma, M\}) = \int_{t_1}^{t_2} |\nabla_T T|^2 dt + \nu \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_1}^{t_2} |\nabla_T^\perp M_i|^2 dt \tag{2.1}$$

ここで，$\nabla^\perp$ は γ に沿う法束 $T^\perp \mathscr{M}^n$ の法接続を表す．(即ち $\nabla_T^\perp M_i = \nabla_T M_i - \langle \nabla_T M_i, T \rangle T$ である．) (2.1) の右辺の第一項は曲げエネルギー，第二項が捩れのエネルギーである．

汎関数 $\mathfrak{T}$ の Euler-Lagrange 方程式を計算すると次のようになる．なお，$\{\gamma, M\}$ の許容される変分としては，γ の両端点 $\gamma(t_1), \gamma(t_2)$，及び両端点での枠 $(T(t_1), M_1(t_1), \ldots, M_{n-1}(t_1))$，$(T(t_2), M_1(t_2), \ldots, M_{n-1}(t_2))$ を固定し，弧長径数も保つものを考える．

$$\begin{aligned} &\nabla_T \Big[2(\nabla_T)^2 T + \big(3|\nabla_T T|^2 - \mu + 2G + \nu |a|^2\big) T \Big] \\ &\qquad\qquad - 4\nu \sum_{i,j=1}^{n-1} \langle (\nabla_T)^2 T, M_i \rangle a_{ji} M_j = 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$(\nabla_T^\perp M_1, \ldots, \nabla_T^\perp M_{n-1}) = (M_1, \ldots, M_{n-1}) a. \tag{2.3}$$

ここで，$\mu \in \boldsymbol{R}$，$a \in \mathfrak{o}(n-1)$ (ただし $\mathfrak{o}(n-1)$ は $n-1$ 次歪対称行列全体のなす Lie 環) である．(なお，第一式 (2.2) は講演での式と少し形が違うが，講演での式に第二式 (2.3) を代入することにより得られる．) 通常の曲線に対する汎関数とは違い，枠付き曲線に対する汎関数なので，Euler-Lagrange 方程式の導出はやや面倒であるが，ここでは証明は省略する．詳しい証明は [6] の第 2 節を参照せよ．

(2.3) で，a は t によらないことに注意する．このことから，Euler-Lagrange 方程式が満たされるならば，捩れのエネルギー ($\mathfrak{T}$ の第二項) の被積分関数が t に依らないことがわかる．これは，もしエネルギーが平衡な状態ならば，(曲げは別にして) 捩れはピアノ線の一部に集中することはなく全体に一様に分布することを表している．

定義 2. $\{\gamma, M\}$ を $\mathscr{M}^n$ 内の適合枠付き弧長径数曲線とする．ある $\mu \in \boldsymbol{R}$, $a \in \mathfrak{o}(n-1)$ が存在して，(2.2) と (2.3) が成り立つとき，$\{\gamma, M\}$ を Kirchhoff 弾性棒という．a は一意的に定まるが，この a を $\{\gamma, M\}$ の捩れ行列という．

$\varphi \in O(n-1)$ とする．(ただし $O(n-1)$ は $n-1$ 次直交群を表す．) $\{\gamma, M\}$ と $\{\gamma, M\varphi\}$ は，基準となる物質枠をずらしているだけで，"捩れ方" は同じである．つまり，この２つは同一のピアノ線の形態を表していると考えられる．従って，$\{\gamma, M\}$ がエネルギーの平衡なピアノ線を表しているならば，$\{\gamma, M\varphi\}$ もそうであるはずである．実際，(2.2),(2.3) より，$\{\gamma, M\}$ が Kirchhoff 弾性棒ならば，$\{\gamma, M\varphi\}$ も Kirchhoff 弾性棒であることが簡単に証明できる．ただし，$\{\gamma, M\}$ の捩れ行列が a ならば，$\{\gamma, M\varphi\}$ の捩れ行列は $\varphi^{-1}a\varphi$ になる．

一方，よく知られているように，任意の $a \in \mathfrak{o}(n-1)$ に対して，ある $\varphi \in O(n-1)$ が存在して $\varphi^{-1}a\varphi$ を標準形にできる．従って，Kirchhoff 弾性棒 $\{\gamma, M\}$ の捩れ行列は常に標準形であると仮定して一般性を失わない．なお，後で n が奇数 ($n = 2m+1$) の時を扱うが，この時は標準形とは次の形のものをいう．

$$
\begin{pmatrix}
0 & -a_1 & & & & & & \\
a_1 & 0 & & & & & & \\
 & & 0 & -a_2 & & & & \\
 & & a_2 & 0 & & & & \\
 & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & & 0 & -a_m \\
 & & & & & & a_m & 0
\end{pmatrix} \tag{2.4}
$$

ここで，$a_j \in \boldsymbol{R}$ $(j = 1, \ldots, m)$ である．

3 自然曲率

ここでは通常の Frenet 曲率とは異なる自然曲率とよばれるものを導入する (cf. [2],[11]). なお，この節は完全に曲線論の話であり，一次元弾性体の議論とは独立であることを注意しておく.

$\gamma : I = [t_1, t_2] \to \mathscr{M}^n$ を速さ 1 の曲線とする. $(P_1, \ldots, P_{n-1})$ を γ に沿った法束内の正規直交枠場で，各 $P_j\,(j = 1, \ldots, n-1)$ が法接続 $\nabla^\perp$ で平行であるものとする. 即ち，各 $t \in I$ に対して $(T(t), P_1(t), \ldots, P_{n-1}(t))$ は正規直交枠であり，$\nabla^\perp_T P_j \equiv 0$ である. 正規直交枠場 $(T, P_1, \ldots, P_{n-1})$ のことを γ に沿った自然枠 (あるいは Bishop 枠) という. 線形常微分方程式の大域解の存在定理により，任意の γ に対して，γ に沿った自然枠が存在することが分かる.

関数 k_j を $k_j = \langle \nabla_T T, P_j \rangle\ (j = 1, \ldots, n-1)$ によって定義すると，

$$(\nabla_T T, \nabla_T P_1, \ldots, \nabla_T P_{n-1}) = (T, P_1, \ldots, P_{n-1}) \begin{pmatrix} 0 & -{}^t\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{k} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

が成り立つ. ここで $\boldsymbol{k} = {}^t(k_1, \ldots, k_{n-1})$ である. この関数 $k_1, \ldots, k_{n-1}$ を γ の (自然枠 $(T, P_1, \ldots, P_{n-1})$ に関する) 自然曲率という. また，$\boldsymbol{k} = {}^t(k_1, \ldots, k_{n-1})$ のことを自然曲率ベクトルとよぶ.

Frenet 枠，Frenet 曲率とは違い，γ が与えられた時にその自然枠，自然曲率ベクトルは一意的には定まらず，$O(n-1)$ の分だけの自由度をもつ. 即ち $(T, P_1, \ldots, P_{n-1})$ を γ の一つの自然枠とすると，任意の $\varphi \in O(n-1)$ に対して $(T, (P_1, \ldots, P_{n-1})\varphi)$ も γ の自然枠である. このとき自然枠 $(T, (P_1, \ldots, P_{n-1})\varphi)$ に関する自然曲率ベクトルは $\varphi^{-1}\boldsymbol{k}$ となる. 一方，Frenet 枠とは違い，$\nabla_T T = 0$ となる点 (即ち Frenet 曲率が消える点) においても問題なく定義できることが自然枠の利点である.

Frenet 枠の時と同様に，次の "曲線論の基本定理" が成り立つ. なお，2 つの曲線 $\gamma_1, \gamma_2 : I \to \mathscr{M}^n$ が合同であるとは，ある等長変換 $\Phi : \mathscr{M}^n \to \mathscr{M}^n$ が存在して，$\gamma_2 = \Phi \circ \gamma_1$ が成り立つことである.

定理 3 (本質的に Bishop([2])). 次の (1),(2) が成り立つ.

(1) 任意の写像 $\boldsymbol{k} : I \to \boldsymbol{R}^{n-1}$ に対し，自然曲率ベクトルが $\boldsymbol{k}$ に一致するような速さ 1 の曲線 $\gamma : I \to \mathscr{M}^n$ が存在する. さらに詳しく言うと次が成り立つ. $\boldsymbol{k} : I \to \boldsymbol{R}^{n-1}$ を任意の写像とする. $t_0 \in I$ とし，$(T^0, P_1^0, \ldots, P_{n-1}^0)$ を $\mathscr{M}^n$ のある点 x の接空間 $T_x\mathscr{M}^n$ における正規直交枠とする. この時，ある適合枠付き弧長径数曲線 $\{\gamma, (P_1, \ldots, P_{n-1})\}$ で次をみたすものが存在する. $(\gamma', P_1, \ldots, P_{n-1})$ は γ に沿った自然枠であり，$(\gamma', P_1, \ldots, P_{n-1})$ に関する γ の自然曲率ベクトルは $\boldsymbol{k}$ に一致し，かつ $\gamma(t_0) = x$，$(\gamma'(t_0), P_1(t_0), \ldots, P_{n-1}(t_0)) = (T^0, P_1^0, \ldots, P_{n-1}^0)$ が成り立つ.

(2) $\gamma, \widetilde{\gamma} : I \to \mathscr{M}^n$ を速さ1の曲線とし，$\boldsymbol{k}, \widetilde{\boldsymbol{k}} : I \to \boldsymbol{R}^{n-1}$ をそれぞれ $\gamma, \widetilde{\gamma}$ の自然曲率とする．この時，γ と $\widetilde{\gamma}$ が $\mathscr{M}^n$ 内の曲線として合同であるための必要十分条件は，ある $\varphi \in O(n-1)$ が存在して $\widetilde{\boldsymbol{k}} = \varphi \boldsymbol{k}$ が成り立つことである．

次に，曲線が充満 (full) であることを定義する．

定義 4. $\gamma : I \to \mathscr{M}^n$ を曲線とする．γ の像 $\gamma(I)$ が，$\mathscr{M}^n$ のどんな $n-1$ 次元完備全測地的部分多様体 $\mathscr{N}^{n-1}$ にも含まれない時，γ を充満な曲線という．

$\mathscr{M}^n$ の $n-1$ 次元完備全測地的部分多様体 $\mathscr{N}^{n-1}$ は，$\mathscr{M}^n$ が $\boldsymbol{R}^n, S^n, H^n$ の時，それぞれ $\boldsymbol{R}^{n-1}, S^{n-1}, H^{n-1}$ に等長である．従って，例えば $\mathscr{M}^n = \boldsymbol{R}^3$ の時は，充満な曲線とは，非平面曲線のことに他ならない．

よく知られているように，$\boldsymbol{R}^3$ 内の弧長径数曲線 (ただし $\nabla_T T$ が至る所 0 でないと仮定) が充満であるための必要十分条件は，Frenet 第 2 曲率 (捩率) が「恒等的に 0」ではないことである．これと同様のことが自然曲率に対しても成り立つ．

命題 5 (本質的に Bishop([2]))**.** $\gamma : I \to \mathscr{M}^n$ を弧長径数曲線とし，$\boldsymbol{k} : I \to \boldsymbol{R}^{n-1}$ をその自然曲率ベクトルとする．このとき，γ が充満であるための必要十分条件は，$\boldsymbol{k}(I)$ が $\boldsymbol{R}^{n-1}$ のどんな $n-2$ 次元線形部分空間にも含まれないことである．

4 主定理の証明

ここでは定理 1 の証明を述べる．以下，$\mathscr{M}^n$ の次元 n は奇数とし，$n = 2m+1$ (m は正整数) とする．

$\{\gamma, M\}$ を $I = (t_1, t_2)$ $(-\infty \leq t_1 < t_2 \leq \infty)$ 上で定義された $\mathscr{M}$ 内の適合枠付き弧長径数曲線とする．$t_0 \in I$ を固定し，$(T, P_1, \ldots, P_{n-1})$ を γ に沿った自然枠で $(P_1(t_0), \ldots, P_{n-1}(t_0)) = (M_1(t_0), \ldots, M_{n-1}(t_0))$ をみたすものとする．$\boldsymbol{k} : I \to \boldsymbol{R}^{n-1}$ を，自然枠 $(T, P_1, \ldots, P_{n-1})$ に関する γ の自然曲率ベクトルとする．

$\mu \in \boldsymbol{R}$ とし，$a \in \mathfrak{o}(2m)$ を (2.4) の形とする．すると，$\{\gamma, M\}$ が (2.2) と (2.3) をみたすことは，次の 2 つの式が成り立つことと同値であることが分かる．(なお，詳しい計算は [9] の第 4 節を参照せよ．)

$$2\boldsymbol{k}'' - 4\nu a \boldsymbol{k}' + (|\boldsymbol{k}|^2 - \mu + 2G + \nu |a|^2)\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}, \tag{4.1}$$

$$(M_1, \ldots, M_{n-1}) = (P_1, \ldots, P_{n-1}) \exp[(t - t_0)a]. \tag{4.2}$$

(4.1) は，複素数値関数で表しておくと便利である．$\psi_j : I \to \boldsymbol{C}$ を $\psi_j = k_{2j-1} + \sqrt{-1}k_{2j}$ により定義すると，(4.1) は次と同値である．

$$2\psi_j'' - 4\nu a_j\sqrt{-1}\psi_j' + \left(\sum_{j=1}^{m}|\psi_j|^2 - \mu + 2G + \nu|a|^2\right)\psi_j = 0, \tag{4.3}$$

ここで $j = 1, \ldots, m$ である．

もし (4.3) の解 $\psi_1, \ldots, \psi_m$ が見つかれば，定理 3 により，$\mathscr{M}^n$ 内の Kirchhoff 弾性棒 $\{\gamma, M\}$ で，γ の自然曲率ベクトルが $\boldsymbol{k} = {}^t(\mathrm{Re}\,\psi_1, \mathrm{Im}\,\psi_1, \ldots, \mathrm{Re}\,\psi_m, \mathrm{Im}\,\psi_m)$，捩れ行列が a であるようなものが作れる．

さて，(4.3) の解を求めるため "Hasimoto 型" の変換を行う．$|\psi_j(t)| > 0$ ($^\forall t \in I$, $j = 1, \ldots, m$) と仮定し，関数 $\kappa_j : I \to \boldsymbol{R}_+$ 及び $\tau_j : I \to \boldsymbol{R}$ を

$$\psi_j(t) = \kappa_j(t)e^{\sqrt{-1}\theta_j(t)}, \tag{4.4}$$

$$\tau_j(t) = \theta_j'(t). \tag{4.5}$$

により定義する．(なお $\mathscr{M}^n = \boldsymbol{R}^3$ の時，変換 $(\kappa_1, \tau_1) \to \psi_1$ は Hasimoto 変換 ([3]) とよばれる．この場合は κ_1 は曲線 γ の Frenet 第 1 曲率，τ_1 は Frenet 第 2 曲率 (振率) に一致することが分かる．)

(4.4),(4.5) を (4.3) に代入すると κ_j, τ_j の微分方程式

$$\kappa_j'' + \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{m}\kappa_j^2 - \mu + 2G + \nu|a|^2\right)\kappa_j - \kappa_j\tau_j(\tau_j - 2\nu a_j) = 0, \tag{4.6}$$

$$2\kappa_j'(\tau_j - \nu a_j) + \tau_j'\kappa_j = 0 \tag{4.7}$$

を得る．(4.7) より，ある $b_j \in \boldsymbol{R}$ が存在して $\kappa_j^2(\tau_j - \nu a_j) = b_j$ が成り立つ．よって τ_j は κ_j によって次のように表せる．

$$\tau_j = \frac{b_j}{\kappa_j^2} + \nu a_j. \tag{4.8}$$

これを (4.6) へ代入して $2\kappa_j'$ をかけると次を得る．

$$\left\{(\kappa_j')^2 + \frac{1}{2}\left(-\mu + 2G + \nu|a|^2 + 2\nu^2 a_j^2\right)\kappa_j^2 + \frac{b_j^2}{\kappa_j^2}\right\}' + \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{m}\kappa_j^2\right)(\kappa_j^2)' = 0. \tag{4.9}$$

さらに

$$\rho_j(t) = \kappa_j(t)^2 = |\psi_j(t)|^2$$

とおくと，(4.9) は次のように書ける．

$$\left\{\frac{(\rho_j')^2}{4\rho_j}+\frac{1}{2}\left(-\mu+2G+\nu|a|^2+2\nu^2a_j^2\right)\rho_j+\frac{b_j^2}{\rho_j}\right\}'+\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{m}\rho_j\right)\rho_j'=0. \tag{4.10}$$

m 個の方程式からなる系 (4.10) の全ての解 $\rho_1,\ldots,\rho_m$ を求めるのは難しいので，ある対称性をみたす特別な解を求めよう．対称性を仮定することにより問題を単独方程式に帰着させる．

$c_1=1$，$c_2,\ldots,c_m>0$ とし，$\varepsilon_j=1$ or -1，$\delta_j=1$ or -1 $(j=2,\ldots,m)$，$\varepsilon_1=\delta_1=1$ とする．条件

$$a_j=\varepsilon_j a_1, \tag{4.11}$$

$$b_j=\delta_j c_j b_1, \tag{4.12}$$

$$\rho_j(t)=c_j\rho_1(t)\quad \text{for all } t\in I. \tag{4.13}$$

を考える．もしこれらの条件をみたす解 $\rho_1,\ldots,\rho_m$ があったとすると，$\rho_1(t)$ は次をみたす．

$$\left\{\frac{(\rho_1')^2}{4\rho_1}+\frac{1}{2}\left(-\mu+2G+2\nu m a_1^2+2\nu^2a_1^2\right)\rho_1+\frac{b_1^2}{\rho_1}+\frac{1}{4}C\rho_1^2\right\}'=0, \tag{4.14}$$

ここで $C=\displaystyle\sum_{j=1}^{m}c_j$ とおいた．よってある $g\in\boldsymbol{R}$ が存在して

$$(\rho_1')^2=-C\rho_1^3-2(-\mu+2G+2\nu m a_1^2+2\nu^2a_1^2)\rho_1^2+4g\rho_1-4b_1^2 \tag{4.15}$$

が成り立つ．(4.15) の右辺を $Q(\rho_1)$ とおく．

この方程式は [10] と同様の方法によって解くことができ，解を Jacobi の sn 関数によって表せる．具体的には次が成り立つ．$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\boldsymbol{R}$ を

$$-\alpha_1\le 0<\alpha_2\le\alpha_3 \tag{4.16}$$

をみたすものとする．任意の $a_1\in\boldsymbol{R}$ をとり，μ,b_1,g を

$$\begin{aligned}
\mu&=\frac{C}{2}(-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+2m\nu a_1^2+2\nu^2a_1^2+2G,\\
b_1&=\frac{1}{2}\sqrt{C\alpha_1\alpha_2\alpha_3},\\
g&=\frac{C}{4}(\alpha_1\alpha_2-\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1)
\end{aligned}$$

により定義する．この時，$-\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ は ρ_1 の 3 次方程式 $Q(\rho_1)=0$ の解となり，

$$\rho_1(t)=\alpha_3\left[1-\frac{\alpha_3-\alpha_2}{\alpha_3}\operatorname{sn}^2\left(\frac{\sqrt{C(\alpha_3+\alpha_1)}}{2}t, \sqrt{\frac{\alpha_3-\alpha_2}{\alpha_3+\alpha_1}}\right)\right]$$

は $\boldsymbol{R}$ 上で方程式 (4.15) をみたす．(なお，$\alpha_2=0$ の時でも上の ρ_1 は (4.15) の解となるが，主定理で構成する解とは関係がないのでここでは除いた．)

パラメタ $a_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を次の関係で d, h, p, w に変換する．

$$d=\alpha_3, \quad h=\frac{a_1}{\sqrt{\alpha_3}}, \quad p=\sqrt{\frac{\alpha_3-\alpha_2}{\alpha_3+\alpha_1}}, \quad w=\sqrt{\frac{\alpha_3}{\alpha_3+\alpha_1}}$$

d, h, p, w の動く範囲は

$$d>0, \quad -\infty<h<\infty, \quad 0\le p<w\le 1 \tag{4.17}$$

となり，a_1, μ, b_1, g 及び $\rho_1(t)$ は d, h, p, w を用いて

$$a_1=h\sqrt{d}, \tag{4.18}$$

$$\mu=\frac{d}{2w^2}\left[-C(1+p^2-3w^2)+4(\nu m+\nu^2)h^2w^2\right]+2G, \tag{4.19}$$

$$b_1=\frac{d^{3/2}\sqrt{C(1-w^2)(w^2-p^2)}}{2w^2}, \tag{4.20}$$

$$g=\frac{Cd^2}{4w^4}[(1-2w^2)(w^2-p^2)+w^2(1-w^2)], \tag{4.21}$$

$$\rho_1(t)=d\left[1-\frac{p^2}{w^2}\operatorname{sn}^2\left(\frac{\sqrt{Cd}}{2w}t, p\right)\right] \tag{4.22}$$

と表せる．

$p=0$ の時，ρ_1 は定数関数である．また，$0<p<1$ の時，ρ_1 は最小周期が $4K(p)w/\sqrt{Cd}$ の周期関数である．(ここで $K(p)$ は第一種完全楕円積分を表す．) この時，$t=4lwK(p)/\sqrt{Cd}$ $(l\in\boldsymbol{Z})$ で ρ_1 は最大値 α_3 をとり，$t=2(2l+1)wK(p)/\sqrt{Cd}$ $(l\in\boldsymbol{Z})$ で ρ_1 は最小値 α_2 をとる．

これまでの議論を逆にたどることにより，次が成立することが分かる．

補題 6. $c_1=1$，$c_2,\ldots,c_m>0$ とし，$\varepsilon_j=1$ *or* -1，$\delta_j=1$ *or* -1 $(j=2,\ldots,m)$，$\varepsilon_1=\delta_1=1$ とする．d, h, p, w を (4.17) をみたす実数とし，a_1, μ, b_1 を (4.18),(4.19),(4.20) で，$\rho_1:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ を (4.22) で定義する．また $a_j, b_j\in\boldsymbol{R}$, $\rho_j:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $j=2,\ldots,m$ を (4.11),(4.12),(4.13) によって定義する．$\kappa_j(t)=\sqrt{\rho_j(t)}$ と定義し，τ_j を (4.8) で，θ_j を (4.5) で，ψ_j を (4.4) で定義する．この時，$\psi_j:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{C}$, $j=1,\ldots,m$ は方程式 (4.3) の解となる．従って，$\mathscr{M}^{2m+1}$ 内の Kirchhoff 弾性棒 $\{\gamma, M\}$ で，γ の自然曲率ベクトルが $\boldsymbol{k}={}^t(\operatorname{Re}\psi_1, \operatorname{Im}\psi_1,\ldots,\operatorname{Re}\psi_m,\operatorname{Im}\psi_m)$，捩れ行列が a であるようなものが存在する．

補題 6 により，奇数次元空間形 $\mathscr{M}^{2m+1}$ 内の Kirchhoff 弾性棒 $\{\gamma, M\}$ で，中心曲線 γ が主定理の条件 (iii) をみたすものが作れた．

さらに，上で $p \neq 0$ ならば，(ii) がみたされることが次のようにして容易に分かる．γ が螺旋ではないことを示すには，γ の Frenet 第 1 曲率の平方 $|\nabla_T T|^2$ が定数関数でないことを示せば十分である．(3.1) より $|\nabla_T T|^2 = |\boldsymbol{k}|^2 = \sum_{j=1}^{m} \rho_j = C\rho_1$ であるが，$p \neq 0$ より，これは定数関数ではない．よって γ は螺旋ではなく，(ii) が示された．

以下で，さらに条件をつけると (i) がみたされることを示す．まず，$\boldsymbol{k} : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^{2m}$ が，もしもある点 $t \in \boldsymbol{R}$ において

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{k}(t), \boldsymbol{k}'(t), \ldots, \boldsymbol{k}^{(2m-1)}(t)) = 2m \tag{4.23}$$

をみたすならば，$\boldsymbol{k}$ の像 $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{R})$ は $\boldsymbol{R}^{2m}$ のどんな $2m-1$ 次元線形部分空間にも含まれない．従って命題 5 より，$\gamma : \boldsymbol{R} \to \mathscr{M}^{2m+1}$ は充満であることが分かる．

よって $\operatorname{rank}(\boldsymbol{k}(t), \boldsymbol{k}'(t), \ldots, \boldsymbol{k}^{(2m-1)}(t))$ を調べればよい．まず次が成り立つことが示せる．

命題 7. 補題 6 で定義した $\boldsymbol{k} : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^{2m}$ に対して $\operatorname{rank}(\boldsymbol{k}(t), \boldsymbol{k}'(t), \ldots, \boldsymbol{k}^{(2m-1)}(t)) \leq 4$ ($^{\forall} t \in \boldsymbol{R}$) が成り立つ．

よって $m \geq 3$ の時は (4.23) は成り立たないことが分かる．以下では $m = 2$，つまり空間形の次元 $n = 5$ と仮定する．

補題 8. $m = 2$ とする．パラメタ d, h, p, w は (4.17) 及び条件 $h \neq 0, w \neq 1, p \neq 0$ をみたすとし，$(\varepsilon_2, \delta_2) = (-1, 1)$ とする．補題 6 のように $\boldsymbol{k} : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^{2m}$，そして Kirchhoff 弾性棒 $\{\gamma, M\}$ を作る．この時，$\boldsymbol{k}$ はある点 $t \in \boldsymbol{R}$ において $\operatorname{rank}(\boldsymbol{k}(t), \boldsymbol{k}'(t), \boldsymbol{k}''(t), \boldsymbol{k}'''(t)) = 4$ をみたす．従って $\gamma : \boldsymbol{R} \to \mathscr{M}^5$ は充満である．

ここでは補題 8 の証明の詳細は述べないが，ε_2 と δ_2 の符号が異なることが本質的に効いていることを注意しておく．

補題 8 で作った γ は，$p \neq 0$ より螺旋ではない．以上により，中心曲線 γ が (i),(ii),(iii) をみたす $\mathscr{M}^5$ 内の Kirchhoff 弾性棒 $\{\gamma, M\}$ が無限個作れた．

References

[1] S. Antman, Nonlinear problems of elasticity, Springer, New York, 1995.

[2] R. Bishop, *There is more than one way to frame a curve*, Amer. Math. Monthly **82** (1975), 246–251.

[3] H. Hasimoto, *Motion of a vortex filament and its relation to elastica*, J. Phys. Soc. Japan **31** (1971), 293–294. Errata, J. Phys. Soc. Japan **31** (1971), 960B.

[4] T. Ivey and D. Singer, *Knot types, homotopies and stability of closed elastic rods*, Proc. London Math. Soc. (3) **79** (1999), 429–450.

[5] V. Jurdjevic, *Integrable Hamiltonian systems on complex Lie groups*, Mem. Amer. Math. Soc. **178** (2005), no. 838.

[6] S. Kawakubo, *Kirchhoff elastic rods in the three-sphere*, Tohoku Math. J. **56** (2004), 205–235.

[7] S. Kawakubo, *Kirchhoff elastic rods in three-dimensional space forms*, J. Math. Soc. Japan **60** (2008), 551–582.

[8] S. Kawakubo, *Kirchhoff elastic rods in higher-dimensional space forms*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **87** (2011), 5–9.

[9] S. Kawakubo, *Global solutions of the equation of the Kirchhoff elastic rod in space forms*, to appear in Bull. Aust. Math. Soc.

[10] J. Langer and D. Singer, *The total squared curvature of closed curves*, J. Differential Geom. **20** (1984), 1–22.

[11] J. Langer and D. Singer, *Lagrangian aspects of the Kirchhoff elastic rod*, SIAM Rev. **38** (1996), 605–618.

[12] A. E. H. Love, A treatise on the mathematical theory of elasticity, Fourth Ed. Dover Publications, New York, 1944.

[13] Y. Shi and J. Hearst, *The Kirchhoff elastic rod, the nonlinear Schrödinger equation, and DNA supercoiling*, J. Chem. Phys. **101** (1994), 5186–5200.

[14] H. Tsuru, *Equilibrium shapes and vibrations of thin elastic rod*, J. Phys. Soc. Japan **56** (1987), 2309-2324.

Department of Applied Mathematics
Fukuoka University
Fukuoka 814-0180, Japan

E-mail address: kawakubo@math.sci.fukuoka-u.ac.jp