Global existence for massless Dirac equations with critical nonlinearities

東北大学情報科学研究科 久保 英夫

1 はじめに

この講演では次の半線型ディラック方程式に対する初期値問題を考える:

$$\mathcal{D}\psi \equiv (\gamma^0\partial_t + \gamma^j\partial_j)\psi = F(\psi), \qquad (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^3, \tag{1.1}$$

$$\psi(0,x) = \varepsilon\psi_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}^3. \tag{1.2}$$

ここで, ψ は $\mathbb{C}^4$ 値の未知関数であり, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_j = \partial/\partial x_j$ $(j = 1,2,3)$, また γ^μ $(\mu = 0,1,2,3)$ は次のように表されるディラック行列とする:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & -\sigma^0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix} \ (j = 1,2,3).$$

ここに,

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

はパウリ行列である．また，$\varepsilon > 0$ とし，$\psi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^4)$ を仮定し，非線型項としては次のような冪乗型のものを考える:

$$F(\psi) = O(|\psi|^p), \quad p > 1. \tag{1.3}$$

さて，初期値問題 (1.1)-(1.2) に対して，Tzvetokov [5] は次の事実を示した:

- $p > 2$ ならば, 十分小さな ε に対して, (1.1)-(1.2) は時間大域的な古典解をもつ.
- $p = 2$ のとき, どんなに ε が小さくとも古典解が有限時間内に爆発するような初期値 ψ_0 を選べる非線型項が存在する．例えば, $F(\psi) = |\psi|\gamma^0\psi$.

更に，次のような予想を与えている:

Tzvetokov 予想 非線型項 $F(\psi)$ が $\mathbb{C}^4$ の定数ベクトル e を用いて

$$F_0(\psi) = \langle\psi, \gamma^0\psi\rangle e \ \text{ or } \ F_1(\psi) = \langle\psi, \gamma^0\gamma^5\psi\rangle e \tag{1.4}$$

のように表せるとき，十分小さな ε に対して, (1.1)-(1.2) は時間大域的な古典解をもつ．但し, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $\mathbb{C}^4$ の内積を表し,

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^0 \\ \sigma^0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ここでの目的は，Tzvetokov 予想を肯定的に解決する事である.

定理 1.1. $\psi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^4)$ とし，$F(\psi)$ は $F_0(\psi)$ と $F_1(\psi)$ の一次結合で表されるものとする．この時，正定数 C, ε_0 が存在して，任意の $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ に対して初期値問題 (1.1)-(1.2) の古典解 ψ が $[0,\infty)\times\mathbb{R}^3$ において一意的に存在し

$$|\psi(t,x)| \le C(1+t+|x|)^{-1}(1+|t-|x||)^{-1}, \tag{1.5}$$
$$|(I+x_j|x|^{-1}\gamma^j\gamma^0)\psi(t,x)| \le C(1+t+|x|)^{-2}\log(2+t+|x|) \tag{1.6}$$

を満たす．更に，$\mathcal{D}\psi_+ = 0$ の解 ψ_+ が存在し，次が成り立つ:

$$\lim_{t\to\infty}\|\psi(t)-\psi_+(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0. \tag{1.7}$$

注意 1. 良く知られているように，$\mathcal{D}^2 = (\partial_t^2 - \Delta)I$ であるが，$\mathcal{D}F(\psi)$ は所謂，Klainerman の零条件を満たさないので，非線型波動方程式系に対する零条件の下での大域存在定理 (cf. [2], [3]) を適用することはできない．

注意 2. 漸近公式 (1.7) により，上の定理で得られた大域解は漸近自由であることが分かる．

2 準備

固定された $\omega \in S^2$ に対して

$$P_+(\omega) \equiv P_+ = \frac{1}{2}(I+\omega_j\gamma^j\gamma^0), \quad P_-(\omega) \equiv P_- = \frac{1}{2}(I-\omega_j\gamma^j\gamma^0)$$

と定める．この時，任意の $\phi, \psi \in \mathbb{C}^4$ に対して

$$F_k(\phi,\psi) = F_k(P_+\phi, P_-\psi) + F_k(P_+\phi, P_-\psi), \quad k=0,1 \tag{2.1}$$

が成り立つことに注意する．実際，$\phi, \psi \in \mathbb{C}^4$ が

$$\phi = P_+\phi + P_-\phi, \quad \psi = P_+\psi + P_-\psi$$

と書き直せること，及び

$$F_k(P_+\phi, P_+\psi) = F_k(P_-\phi, P_-\psi) = 0 \tag{2.2}$$

が確かめられることから (2.1) が成り立つ．

更に，いくつか記号を用意する: $x \in \mathbb{R}^3$ に対して $r=|x|, \omega = x/r, r\partial_r = x\cdot\nabla_x$ とおく．また

$$\Omega_1 = (x_2\partial_3 - x_3\partial_2) + \frac{1}{2}\gamma^3\gamma^3, \quad \Omega_2 = (x_3\partial_1 - x_1\partial_3) + \frac{1}{2}\gamma^3\gamma^1,$$
$$\Omega_3 = (x_1\partial_2 - x_2\partial_1) + \frac{1}{2}\gamma^1\gamma^2$$

と定め，$\Gamma = \{\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_6\} = \{\partial_t, \partial_1, \partial_2, \partial_3, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\}$ と表す．多重指数 $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_6)$ に対して $\Gamma^\alpha = \Gamma_0^{\alpha_0}\cdots\Gamma_6^{\alpha_6}$ と記す．非負整数 m と滑らかな関数 φ に対し，

$$|\varphi(t,x)|_m = \sum_{|\alpha|\le m}|\Gamma^\alpha\varphi(t,x)|, \quad \|\varphi(t)\|_m = \sum_{|\alpha|\le m}\|\Gamma^\alpha\varphi(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

と置く．交換子 $[A,B] = AB - BA$ に関する代数ついてベクトル場 Γ は閉じているので，これらの量は well-defined である．

3　基礎となる不等式

まず，次の非斉次ディラック方程式を考える:

$$\mathcal{D}\psi \equiv (\gamma^0\partial_t + \gamma^j\partial_j)\psi = f(t,x), \qquad (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^3, \tag{3.1}$$

$$\psi(0,x) = \psi_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}^3. \tag{3.2}$$

任意の $a = 0,\dots,6$ に対して，$[\Gamma_a, \mathcal{D}] = 0$ が成り立つので，次ようなの L^2 評価を得ることができる.

補題 3.1. ψ が (3.1)-(3.2) の解ならば，任意の非負整数 m に対して

$$\|\psi(t)\|_m \le C\left(\|\psi_0\|_m + \int_0^t \|f(s)\|_m ds\right), \quad t \ge 0 \tag{3.3}$$

が成り立つ.

次に，(3.1)-(3.2) の解の各点評価を導く．そのために，方程式に $\mathcal{D}$ を作用させ，次の波動方程式に対する考察に帰着させる.

$$(\partial_t^2 - \Delta)I\psi = \mathcal{D}f(t,x), \qquad (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^3, \tag{3.4}$$

$$\psi(0,x) = \psi_0(x), \;\; (\partial_t\psi)(0,x) = -\gamma^0\gamma^j\partial_j\psi_0(x) + \gamma^0 f(0,x) \qquad x \in \mathbb{R}^3. \tag{3.5}$$

波動方程式の解の各点評価は詳しく調べられており，Asakura [1], Yokoyama [6], Katayama-K [4] などより次の評価式を得る.

補題 3.2. $\mu,\ \nu \ge 1$ とし，ψ を (3.1)-(3.2) の解する．この時，任意の非負整数 m に対して，$\nu = 1$ または $\mu = 1$ ならば

$$\begin{aligned}(1+r)(1+|t-r|)|\psi(t,x)|_m \le C(&\sup_{x\in\mathbb{R}^3}(1+r)^3|\psi_0(x)|_{m+1} \\ &+ \log(2+t)\sup_{(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^3} r(1+t+r)^\nu(\min\{(1+r),(1+|t-r|)\})^\mu|f(t,x)|_{m+1})\end{aligned} \tag{3.6}$$

が成り立ち，$\nu > 1$ かつ $\mu > 1$ ならば

$$\begin{aligned}(1+r)(1+|t-r|)|\psi(t,x)|_m \le C(&\sup_{x\in\mathbb{R}^3}(1+r)^3|\psi_0(x)|_{m+1} \\ &+ \sup_{(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^3} r(1+t+r)^\nu(\min\{(1+r),(1+|t-r|)\})^\mu|f(t,x)|_{m+1})\end{aligned} \tag{3.7}$$

が成り立つ.

非線型項の代数的構造から導かれる (2.1) を利用するには，次の補題が本質的である.

補題 3.3. $\Lambda = \{(t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^3 \,|\, 0 \le t \le 2|x|,\ |x| \ge 1\}$ と置き，$M > 0$ とする．$F(\psi)$ は (1.3) を $p = 2$ として満たしているとする．もし (1.1) を満たす ψ に対して

$$\sup_{(t,x)\in\Lambda} |\psi(t,x)|_1(1+t+r)(1+|t-r|) \le M \tag{3.8}$$

が成り立つなら，任意の $(t,x) \in \Lambda$ に対して次を得る:

$$|P_+(\omega)\psi(t,x)| \le C(M+M^2)(1+t+r)^{-2}\log(2+t+r|). \tag{3.9}$$

$\boxed{\text{証明の概略}}$ 恒等式

$$\nabla_x = \omega\partial_r - r^{-1}O, \quad O = \omega \wedge x \wedge \nabla_x$$

を用いると，(1.1) から

$$(\gamma^0\partial_t + \omega_j\gamma^j\partial_r)\psi = r^{-1}O_j\gamma^j\psi + F(\psi)$$

を得る．この両辺に $P_+(\omega)\gamma^0$ を掛けると

$$(\partial_t - \partial_r)P_+\psi = P_+\gamma^0(r^{-1}O_j\gamma^j\psi + F(\psi)) =: G(\psi) \tag{3.10}$$

が従う．$(t,x) \in \Lambda$ のとき，$r \geq C(1+r+t)$ が成り立つので，仮定 (3.8) より，

$$|G(\psi(t,x))| \leq C(M(1+r+t)^{-2}(1+|t-r|)^{-1} + M^2(1+r+t)^{-2}(1+|t-r|)^{-2})$$

と評価できる．ここで，$t_0 \in [0,T]$, $x_0 = r_0\,\omega_0 \in \mathbb{R}^3$ を固定し，直線 $\{(s,(r_0+(t_0-s))\omega_0) \mid s \in [0,t_0]\}$ に沿って (3.10) を積分すると (3.9) を得る． □

4　定理の証明の方針

初期値問題 (1.1)–(1.2) の局所解の存在は容易に示す事ができるので，アプリオリ評価を行えば良い．即ち，k を自然数, $M \geq 1$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, $M\varepsilon \leq 1$ として，

$$\sup_{(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^3} |\psi(t,x)|_k \leq M\varepsilon \quad \Longrightarrow \sup_{(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^3} |\psi(t,x)|_k \leq M\varepsilon/2$$

を示すことにより，局所解を時間大域的に延長することができる．上の命題を示すには，前節で紹介した不等式を用いて，非線型波動方程式の大域可解性の証明と同様の議論を実行すれば良い (cf. [4]).

参考文献

[1] F. Asakura, Existence of a global solution to a semi-liear wave equation with slowly decreasing initial data in three space dimensions, *Comm. Partial Differential Equations* **11** (1986), 1459–1487.

[2] D. Christodoulou, *Global solutions of nonlinear hyperbolic equations for small initial data*, Comm. Pure Appl. Math. **39** (1986), 267–282.

[3] S. Klainerman, *Uniform decay estimates and the Lorentz invariance of the classical wave equation*, Comm. Pure Appl. Math. **38** (1985), 321–332.

[4] S. Katayama and H. Kubo, *Decay estimates of a tangential derivative to the light cone for the wave equation and their application*, SIAM J. Math. Anal. **39**, (2008), 1851–1862.

[5] N. Tzvetkov: Existence of global solutions to nonlinear massless Dirac system and wave equation with small data, Tsukuba J. Math. **22**, 193–211 (1998).

[6] K. Yokoyama, *Global existence of classical solutions to systems of wave equations with critical nonlinearity in three space dimensions*, J. Math. Soc. Japan, **52** (2000), 609–632.