# 岩堀ヘッケ代数の Goldman involution と固定点部分代数の表現（交代群の $q$ 変形とその表現）

小山工業高等専門学校　三橋秀生 (Hideo Mitsuhashi)

## 1　はじめに

$A$ 型岩堀ヘッケ代数 $\mathscr{H}_n(q)$ は対称群の $q$ 変形として考えることができ、その中に交代群の $q$ 変形を構成できることを、[6] で示した。その後、$B$ 型の場合に適用し、$A$ 型のときと同様に生成元を変更すると、$B$ 型においても基本関係式の偶奇性が保存され、それによってランクが元の岩堀ヘッケ代数の半分であるような部分代数を構成できる事を示した [7]。これらの内容を、岩堀ヘッケ代数の自己同型の固定部分代数という観点から統一的に論じ、岩堀ヘッケ代数の部分代数の階層を構成した [8]。

## 2　ヘッケ代数

$G$ を有限群、$H$ を $G$ の部分群とする。標数 0 の体 $K$ 上のヘッケ代数 $\mathscr{H}(G,H)$ は以下で定まる $K$ 上の代数である。

$$\mathscr{H}(G,H) = \mathrm{End}_{K[G]}(\mathscr{C}(H\backslash G))$$

但し、$\mathscr{C}(H\backslash G) = \{f : H\backslash G \longrightarrow K\}$ であり、$K[G]$ は $\mathscr{C}(H\backslash G)$ に左から作用するものとする。

$$(gf)(Hx) = f(Hxg) \quad \text{for } g,x \in G, f \in \mathscr{C}(H\backslash G)$$

このとき、

$$\mathscr{H}(G,H) \cong \{\mathrm{End}_{K[G]}(1_H^G)\}^o \cong eK[G]e$$

（ただし、$e = |H|^{-1}\sum_{h\in H} h$）であることから、$\mathscr{H}(G,H)$ は $H$ からの $G$ の誘導表現 $1_H^G = K[G]\otimes_{K[H]}e$ の解析において重要な役割を果たす。有限群のみならず、一般に局所コンパクト群 $G$ とその閉部分群 $H$ に対して、両側 $H$-不変連続函数の空間 $\mathscr{C}(H\backslash G/H)$ に適当な畳み込み積を定めることができれば、ヘッケ代数を定義することが可能になる。ヘッケ代数の関係する分野には、表現論・数論・量子群・結び目理論・数理物理・作用素環論・球関数論などがあり、数学の多様な領域で現れる代数であるといえる。

岩堀ヘッケ代数は $G$ を有限体上の有限シュバレー群、$H$ を $G$ のボレル部分群とした場合のヘッケ代数 $\mathscr{H}(G,H)$ である。その基本関係式は $G$ の Weyl 群のそれの $q$ 変形といえるものになっている。従って、$\mathscr{H}(G,H)$ は Weyl 群の $q$ 変形であるといってよい。$A$ 型の場合を例示する。

$A_{n-1}$ 型　$G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$,（$q$ は素数ベキ）　$H = \{(a_{ij}) \in G | a_{ij} = 0 \quad \text{if } i > j\}$

$A_{n-1}$ 型 Weyl 群（対称群）

生成元　$s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$
基本関係式　$s_i^2 = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$
$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-2)$
$s_i s_j = s_j s_i \qquad (|i-j| > 1)$
（$\mathbb{C}$ 上の）$A_{n-1}$ 型岩堀ヘッケ代数 $\mathscr{H}_{\mathbb{C},n}(q) = \mathscr{H}(G, H)$
生成元　$a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$
基本関係式　$a_i^2 = (q-1)a_i + q \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$
$a_i a_{i+1} a_i = a_{i+1} a_i a_{i+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-2)$
$a_i a_j = a_j a_i \qquad (|i-j| > 1)$

# 3　$A$ 型岩堀ヘッケ代数と交代群の $q$ 変形 [6]

F.G.Frobenius は 1900 年 [2] から 1901 年 [3] にかけて対称群 $\mathfrak{S}_n$ の既約指標と交代群 $\mathfrak{A}_n$ の既約指標および $\mathfrak{S}_n \to \mathfrak{A}_n$ 分岐則を決定した。この結果の $q$ 変形として、分岐則に関して Frobenius の示したものと同様の現象が成り立つ部分代数を岩堀ヘッケ代数の中に構成できれば、それは交代群の $q$ 変形に相当するものであり、その構造と表現論を解明できればリー型の有限群の分野に新しい知見をもたらすことができる、と考えたことが交代群の $q$ 変形の研究の動機である。

以降、$q$ を不定元とし、$\mathbb{Q}(q)$ を有理数体 $\mathbb{Q}$ に $q$ を付加した拡大体とする。$A_{n-1}$ 型岩堀ヘッケ代数 $\mathscr{H}_{\mathbb{Q}(q),n}(q)$ は以下の生成元と基本関係式を持つ、$\mathbb{Q}(q)$ 上の代数である。

生成元: $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$

基本関係式:

(A1) $a_i^2 = (q-1)a_i + q \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$
(A2) $a_i a_{i+1} a_i = a_{i+1} a_i a_{i+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-2)$
(A3) $a_i a_j = a_j a_i \qquad (|i-j| > 1)$

$\mathscr{H}_{\mathbb{Q}(q),n}(q)$ には次で定まる位数 2 の自己同型（Goldman involution）[1, 5] がある。

$$\natural : \mathscr{H}_{\mathbb{Q}(q),n}(q) \longrightarrow \mathscr{H}_{\mathbb{Q}(q),n}(q), \quad a_i^\natural = (q-1) - a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

これを用いて、$\mathscr{H}_{\mathbb{Q}(q),n}(q)$ の新しい生成元 $b_1, \ldots, b_{n-1}$ を次で定める。

$$b_i = \frac{a_i - a_i^\natural}{q+1} = \frac{2a_i - (q-1)}{q+1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

定義より、$b_i^\natural = -b_i$ が直ちにしたがう。

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 &= \{1, b_1\} \\ \mathcal{S}_2 &= \{1, b_2, b_2 b_1\} \\ &\vdots \\ \mathcal{S}_{n-1} &= \{1, b_{n-1}, b_{n-1}b_{n-2}, \ldots, b_{n-1}b_{n-2}\ldots b_2 b_1\} \end{aligned}$$

としたとき、$\mathscr{H}_{\mathbb{Q}(q),n}(q)$ はベクトル空間として、

$$\mathscr{H}_{\mathbb{Q}(q),n}(q) = \bigoplus_{U_i \in \mathcal{S}_i} \mathbb{Q}(q) U_1 U_2 \cdots U_{n-1}$$

である。また、$b_i$ による $\mathscr{H}_{\mathbb{Q}(q),n}(q)$ の基本関係式は次のとおりである。

(A'1) $b_i^2 = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$

(A'2) $b_i b_{i+1} b_i = b_{i+1} b_i b_{i+1} - \left(\dfrac{q-1}{q+1}\right)^2 (b_i - b_{i+1}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n-2)$

(A'3) $b_i b_j = b_j b_i \quad (|i-j| > 1)$

この形からわかるように、生成元 $b_1, \ldots, b_{n-1}$ による $\mathscr{H}_{\mathbb{Q}(q),n}(q)$ の元の表示は生成元の積の個数の偶奇性を保つ。$\mathscr{A}_{\mathbb{Q}(q),n}(q)$ を $b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ の偶数個の積の線型結合全体からなる $\mathscr{H}_{\mathbb{Q}(q),n}(q)$ の部分代数とすると、

$$\mathscr{A}_{\mathbb{Q}(q),n}(q) = \oplus_{M \in \mathscr{E}_n^\natural} \mathbb{Q}(q) M$$

である。ただし、$\mathscr{E}_n^\natural = \{U_1 U_2 \cdots U_{n-1} \,|\, U_i \in \mathcal{S}_i$ 且つ $b_i$ 達の偶数個の積 $\}$ とする。この時、定義から、$\mathscr{A}_{\mathbb{Q}(q),n}(q) = \mathscr{H}_{\mathbb{Q}(q),n}(q)^\natural = \natural$-固定部分代数であることが従う。また、

$$\dim \mathscr{A}_{\mathbb{Q}(q),n}(q) = n!/2, \quad \mathscr{A}_{\mathbb{Q}(q),2}(q) = \mathbb{Q}(q)1$$

なども容易に得られる。さらに、$\mathscr{A}_{\mathbb{Q}(q),n}(1) \cong \mathbb{Q}[\mathfrak{A}_n]$ であることから、$\mathscr{A}_{\mathbb{Q}(q),n}(q)$ は交代群 $\mathfrak{A}_n$ の $q$ 変形とみなせる。

$\mathscr{A}_{\mathbb{Q}(q),n}(q)$ の生成元と基本関係式 $(n > 2)$ は次のとおりである。
生成元 $x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}$
基本関係式

(x1) $x_1^3 + \left(\dfrac{q-1}{q+1}\right)^2 (x_1^2 - x_1) = 1$

(x2) $x_i^2 = 1 \quad (i > 1)$

(x3) $(x_{i-1} x_i)^3 + \left(\dfrac{q-1}{q+1}\right)^2 \Big\{ (x_{i-1} x_i)^2 - x_{i-1} x_i \Big\} = 1 \quad (i = 2, 3, \ldots, n-2)$

(x4) $(x_i x_j)^2 = 1 \quad (|i-j| > 1)$

同型対応は $x_i \mapsto b_1 b_{i+1} (i = 1, \ldots n-2)$ で与えられ、$q = 1$ において、$\mathfrak{A}_n$ の基本関係式（$s_1 s_{i+1}$ を $\mathfrak{A}_n$ の生成元とした場合）が復元する。

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_1 &= \{1, x_1, x_1^2\} \\
\mathcal{X}_2 &= \{1, x_2, x_2 x_1, x_2 x_1^2\} \\
&\ \vdots \\
\mathcal{X}_{n-2} &= \{1, x_{n-2}, x_{n-2} x_{n-3}, \ldots, x_{n-2} \cdots x_2 x_1, x_{n-2} \cdots x_2 x_1^2\}
\end{aligned}$$

としたとき、ベクトル空間として、

$$\mathscr{A}_{\mathbb{Q}(q),n}(q) = \bigoplus_{M \in \mathscr{M}_n} \mathbb{Q}(q)M$$

が成り立つ。但し、$\mathscr{M}_n = \{U_1 U_2 \cdots U_{n-2} \,|\, U_i \in \mathcal{X}_i\}$ とした。

$\mathscr{H}_{\mathbb{Q}(q),n}(q)$ の（通常）既約表現はサイズ $n$ のヤング図形でパラメトライズされることが知られている。$(\pi_\lambda, V_\lambda)$ をヤング図形 $\lambda$ に対応する $\mathscr{H}_{\mathbb{Q}(q),n}(q)$ の（通常）既約表現する。このとき、$\{\pi_\lambda | \lambda$はサイズ $n$ のヤング図形$\}$ は $\mathscr{H}_{\mathbb{Q}(q),n}(q)$ の既約表現の完全代表系になる。

$\pi_\lambda$ を $\mathscr{A} = \mathscr{A}_{\mathbb{Q}(q),n}(q)$ への制限した場合、互いに他の共役となる二つのヤング図形は表現が同値になる。すなわち、$\lambda'$ を $\lambda$ と共役なヤング図形とするとき、

$$(\pi_\lambda|_{\mathscr{A}}, V_\lambda|_{\mathscr{A}}) \cong (\pi_{\lambda'}|_{\mathscr{A}}, V_{\lambda'}|_{\mathscr{A}}).$$

さらに、$\lambda' \neq \lambda$ ならば $\pi_\lambda|_{\mathscr{A}}$ は（絶対）既約であり、$\lambda' = \lambda$ ならば基礎体を代数閉包 $\overline{\mathbb{Q}(q)}$ に拡張すると、次数の等しい互いに非同値な既約表現の直和

$$\pi_\lambda|_{\mathscr{A}} = \pi_\lambda|_{\mathscr{A}}^{+} \oplus \pi_\lambda|_{\mathscr{A}}^{-}$$

になることがわかる。そして、これらが $\mathscr{A}$ の $\overline{\mathbb{Q}(q)}$ 上の既約表現の完全代表系を成すことが示される。すなわち、$\{\lambda_i,\, \lambda'_i,\, \mu_j\}_{i=1,2,\dots p}^{j=1,2,\dots,r}$, $\lambda'_i \neq \lambda_i, \mu'_j = \mu_j$ をサイズ $n$ のヤング図形の集合とするとき、$\{\pi_{\lambda_i}|_{\mathscr{A}}, \pi_{\mu_j}|_{\mathscr{A}}^{+}, \pi_{\mu_j}|_{\mathscr{A}}^{-}\}_{i=1,2,\dots p}^{j=1,2,\dots,r}$ は $\mathscr{A}$ の $\overline{\mathbb{Q}(q)}$ 上の既約表現の完全代表系を成す。この分岐則は $q=1$ とすると、対称群の既約表現を交代群に制限した場合の分岐則に等しい。以上が $A$ 型の場合の交代群の $q$ 変形の構成と分岐則の $q$ 類似である。

# 4　$B$ 型ヘッケ代数とその部分代数 [7]

$u, q$ を不定元とし $K = \mathbb{Q}(u,q)$ とする。このとき、$B_n$ 型ヘッケ代数 $\mathscr{H}_{K,n}(u,q)$ $(n \geq 2)$ は以下のような生成元と基本関係式を持つ $K$ 上の代数である。

生成元: $a_1, a_2, \dots, a_n$

基本関係式:

(B1) $a_1^2 = (u-1)a_1 + u$

(B2) $a_i^2 = (q-1)a_i + q$ 　　if $i = 2, 3, \dots, n$

(B3) $a_1 a_2 a_1 a_2 = a_2 a_1 a_2 a_1$

(B4) $a_i a_{i+1} a_i = a_{i+1} a_i a_{i+1}$ 　　if $i = 2, 3, \dots, n$

(B5) $a_i a_j = a_j a_i$ 　　if $|i-j| > 1$

$\mathscr{H}_{K,n}(u,q)$ は $K$-ベクトル空間として次元 $2^n n!$ を持つことが知られている。また、$\mathscr{H}_{K,n}(u,q)$ には以下で示される Goldman's involution とよばれる特別な自己同型 $\natural$ がある（[1, 5]）。各生成元に対して、

$$\begin{aligned} a_1^{\natural} &= (u-1) - a_1 \\ a_i^{\natural} &= (q-1) - a_i \qquad \text{if } i = 2,3,\ldots,n \end{aligned}$$

とし、これを代数準同型に拡張する。このとき各 $a_i^{\natural}$ は関係式 (B1)〜(B5) を満たし、さらに、$a_i^{\natural\natural} = a_i$ を満たしている。

$\mathscr{H}_{K,n}(u,q)$ に新しい生成元を以下のように定義する。

$$b_1 = \frac{a_1 - a_1^{\natural}}{u+1} \qquad b_i = \frac{a_i - a_i^{\natural}}{q+1} \quad (i > 1)$$

この時、$b_i^{\natural} = -b_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ が成り立つ。$b_i (i = 1,2,\ldots,n)$ は $\mathscr{H}_{K,n}(u,q)$ を生成し、基本関係式は以下の通りである。

(B'1) $b_i^2 = 1 \qquad \textit{if } i = 1,2,\ldots,n$

(B'2) $b_1 b_2 b_1 b_2 = b_2 b_1 b_2 b_1 - 2\dfrac{(u-1)(q-1)}{(u+1)(q+1)}(b_1 b_2 - b_2 b_1)$

(B'3) $b_i b_{i+1} b_i = b_{i+1} b_i b_{i+1} - \left(\dfrac{q-1}{q+1}\right)^2 (b_i - b_{i+1}) \qquad \textit{if } i = 2,3,\ldots,n$

(B'4) $b_i b_j = b_j b_i \qquad \textit{if } |i-j| > 1$

$\mathscr{H}_{K,n}(u,q)$ の元から成る次のような集合を考える。

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1 &= \{1, b_1\} \\ \mathcal{T}_2 &= \{1, b_2, b_2 b_1, b_2 b_1 b_2\} \\ &\vdots \\ \mathcal{T}_i &= \{1, b_i, b_i b_{i-1}, \ldots, b_i b_{i-1} \cdots b_2 b_1, b_i b_{i-1} \cdots b_2 b_1 b_2, \\ &\qquad \ldots, b_i b_{i-1} \cdots b_2 b_1 b_2 \cdots b_{i-1} b_i\} \\ &\vdots \\ \mathcal{T}_n &= \{1, b_n, b_n b_{n-1}, \ldots, b_n b_{n-1} \cdots b_2 b_1, b_n b_{n-1} \cdots b_2 b_1 b_2, \\ &\qquad \ldots, b_n b_{n-1} \cdots b_2 b_1 b_2 \cdots b_{n-1} b_n\} \end{aligned}$$

このとき、

$$\mathscr{H}_{K,n}(u,q) = \bigoplus_{U_i \in \mathcal{T}_i} K U_1 U_2 \cdots U_n$$

が成り立つ。これにより、$\{U_1 U_2 \cdots U_n | U_i \in \mathcal{T}_i\}$ は $\mathscr{H}_{K,n}(u,q)$ の基底を成すわけだが、この中で $b_i (i = 1,2,\ldots,n)$ の偶数個の積のものの全体を $\mathcal{E}$ とおくと、$|\mathcal{E}| = 2^{n-1} n!$ であることがわかる。このとき、$\mathscr{H}_{K,n}(u,q)$ の $2^{n-1} n!$ 次元 $K$-部分加群 $\bigoplus_{U \in \mathcal{E}} KU$ は $\natural$-固定部分代数

$$\mathscr{H}_{K,n}(u,q)^{\natural} = \{b \in \mathscr{H}_{K,n}(u,q) | b^{\natural} = b\}$$

に一致する。

$\lambda=(\lambda^{(1)},\lambda^{(2)})$ を 2 つのヤング図形 $\lambda^{(1)},\lambda^{(2)}$ からなる組とし、$|\lambda|$ を $\lambda^{(1)}$ と $\lambda^{(2)}$ の箱数の総和（トータルサイズ）とする。$\mathscr{H}_{K,n}(u,q)$ の（通常）既約表現はトータルサイズ $n$ の 2 つのヤング図形の組でパラメトライズされることが知られている [4]。$(\pi_\lambda,V_\lambda)$ を二つのヤング図形の組 $\lambda=(\lambda^{(1)},\lambda^{(2)})$ に対応する $\mathscr{H}_{K,n}(u,q)$ の（通常）既約表現する。このとき、$\{\pi_\lambda|\lambda$ はトータルサイズ $n$ の 2 つのヤング図形の組 $\}$ は $\mathscr{H}_{K,n}(u,q)$ の既約表現の完全代表系になる。

$\pi_{\lambda\natural}$ を $\pi_\lambda$ の $\mathscr{H}_{K,n}(u,q)^\natural$ への制限とする。このとき、$\lambda=(\lambda^{(1)},\lambda^{(2)})$ と $\bar{\lambda}=(\lambda^{(2)\prime},\lambda^{(1)\prime})$ は表現が同値になる。すなわち、$\pi_{\lambda\natural}\cong\pi_{\bar{\lambda}\natural}$ が成り立つ。次に基礎体を $\overline{K}$ とし、トータルサイズが 2 以上で $\lambda=\bar{\lambda}$ である場合を考える。この時、$\pi_{\lambda\natural}$ は次数の等しい互いに非同値な二つの既約表現 $\pi^+_{\lambda\natural}$ と $\pi^-_{\lambda\natural}$ に既約分解する。また、$\lambda\neq\bar{\lambda}$ ならば $\pi_{\lambda\natural}$ は既約である。そして、これらが $\mathscr{H}_{K,n}(u,q)^\natural$ の $\overline{K}$ 上の既約表現の完全代表系を成すことが示される。すなわち、$\{\lambda_1,\bar{\lambda}_1,\lambda_2,\bar{\lambda}_2,\ldots,\lambda_p,\bar{\lambda}_p,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_q\}$ をトータルサイズが $n$ である 2 つのヤング図形の組全体のなす集合で、$\lambda_i\neq\bar{\lambda}_i(i=1,2,\ldots,p)$、$\mu_j=\bar{\mu}_j(j=1,2,\ldots,q)$ とする。このとき、$\{\pi_{\lambda_i\natural},\pi^+_{\mu_j\natural},\pi^-_{\mu_j\natural}\}^{i=1,2,\ldots,p}_{j=1,2,\ldots,q}$ は $\mathscr{H}_{K,n}(u,q)^\natural$ の $\overline{K}$ 上の既約表現の完全代表系をなす。

# 5 $D$ 型ヘッケ代数 [4]

$D$ 型岩堀ヘッケ代数は、部分的に退化した $B$ 型岩堀ヘッケ代数のある自己同型の固定部分代数として実現できる。$\mathscr{H}_{K,n}(u,q)$ の基本関係式 (B1)〜(B5) で、$u=1$ としたものを基本関係式に持つ $\mathbb{Q}(q)$ 上の代数を $\mathscr{H}_n$ とおき、部分的に退化した $B_n$ 型岩堀ヘッケ代数と呼ぶことにする。$\mathscr{H}_n$ には位数 2 の自己同型として、$u=1$ とおいた $\natural$ の他に、

$$\begin{aligned} a_1^\sharp &= -a_1 \\ a_i^\sharp &= a_i \qquad \text{if } i=2,3,\ldots,n \end{aligned}$$

とし、これを代数準同型に拡張することで得られる $\sharp$ がある。$D_n$ 型岩堀ヘッケ代数 $(n\geq 4)$ は $\mathscr{H}_n$ の $\sharp$-固定部分代数 $\mathscr{H}_n^\sharp$ に同型であり、次元 $2^{n-1}n!$ を持つ。$\mathscr{H}_n$ の既約表現は $\mathscr{H}_{K,n}(u,q)$ の場合と同様に、トータルサイズ $n$ の二つのヤング図形の組でパラメトライズされる。これを再び $(\pi_\lambda,V_\lambda)$ と表すことにすると、$\pi_\lambda$ の $\mathscr{H}_n^\sharp$ への制限 $\pi_{\lambda\sharp}$ は、$\pi_{\lambda\sharp}\cong\pi_{\lambda^*\sharp}$ を満たす。ここで、$\lambda^*=(\lambda^{(2)},\lambda^{(1)})$ とした。トータルサイズが 2 以上で $\lambda=\lambda^*$ である場合を考える。この時、$\pi_{\lambda\sharp}$ は次数の等しい互いに非同値な二つの既約表現 $\pi^+_{\lambda\sharp}$ と $\pi^-_{\lambda\sharp}$ に既約分解する。また、$\lambda\neq\lambda^*$ ならば $\pi_{\lambda\sharp}$ は既約である。そして、これらが $\mathscr{H}_n^\sharp$ の $\mathbb{Q}(q)$ 上の既約表現の完全代表系を成すことが示される。すなわち、$\{\lambda_1,\lambda_1^*,\lambda_2,\lambda_2^*,\ldots,\lambda_p,\lambda_p^*,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_q\}$ をトータルサイズが $n$ である 2 つのヤング図形の組全体のなす集合で、$\lambda_i\neq\lambda_i^*(i=1,2,\ldots,p)$、$\mu_j=\mu_j^*(j=1,2,\ldots,q)$ とする。このとき、$\{\pi_{\lambda_i\sharp},\pi^+_{\mu_j\sharp},\pi^-_{\mu_j\sharp}\}^{i=1,2,\ldots,p}_{j=1,2,\ldots,q}$ は $\mathscr{H}_n^\sharp$ の $\mathbb{Q}(q)$ 上の既約表現の完全代表系をなす。

# 6　$D$ 型ヘッケ代数の部分代数 [8]

$u=1$ とおいた $\natural$ による $\mathscr{H}_n$ の固定部分代数を $\mathscr{H}_n^{\natural}$ とする。$\mathscr{H}_n$ には $\natural, \sharp$ 以外に、

$$
\begin{aligned}
a_1^{\flat} &= a_1 \\
a_i^{\flat} &= (q-1)-a_i \qquad \text{if } i=2,3,\ldots,n
\end{aligned}
$$

とし、これを代数準同型に拡張することで得られる自己同型 $\flat$ がある。$\flat$ による $\mathscr{H}_n$ の固定部分代数を $\mathscr{H}_n^{\flat}$ とする。$\pi_\lambda$ の $\mathscr{H}_n^{\flat}$ への制限 $\pi_{\lambda\flat}$ は、$\pi_{\lambda\flat}{\cong}\pi_{\lambda'\flat}$ を満たす。ここで、$\lambda'=(\lambda^{(1)\prime},\lambda^{(2)\prime})$ とした。次に、基礎体を $\overline{\mathbb{Q}(q)}$ に拡大し、トータルサイズが 2 以上で $\lambda=\lambda'$ である場合を考える。この時、$\pi_{\lambda\flat}$ は次数の等しい互いに非同値な二つの既約表現 $\pi^{+}_{\lambda\flat}$ と $\pi^{-}_{\lambda\flat}$ に既約分解する。また、$\lambda\neq\lambda'$ ならば $\pi_{\lambda\flat}$ は既約である。そして、これらが $\mathscr{H}_n^{\flat}$ の $\overline{\mathbb{Q}(q)}$ 上の既約表現の完全代表系を成すことが示される。すなわち、$\{\lambda_1,\lambda_1',\lambda_2,\lambda_2',\ldots,\lambda_p,\lambda_p',\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_q\}$ をトータルサイズが $n$ である 2 つのヤング図形の組全体のなす集合で、$\lambda_i{\neq}\lambda_i'(i=1,2,\ldots,p)$、$\mu_j=\mu_j'(j=1,2,\ldots,q)$ とする。このとき、$\{\pi_{\lambda_i\flat},\pi^{+}_{\mu_j\flat},\pi^{-}_{\mu_j\flat}\}^{i=1,2,\ldots,p}_{j=1,2,\ldots,q}$ は $\mathscr{H}_n^{\flat}$ の $\overline{\mathbb{Q}(q)}$ 上の既約表現の完全代表系をなす。

$\mathscr{H}_n^{\dagger}=\mathscr{H}_n^{\sharp}{\cap}\mathscr{H}_n^{\natural}{\cap}\mathscr{H}_n^{\flat}$ とおくと、$\mathscr{H}_n^{\dagger}$ は $\mathscr{H}_n^{\sharp}$ の部分代数であり、次元 $2^{n-2}n!$ を持つことがわかる。以上から、$\mathscr{H}_n{\supset}\mathscr{H}_n^{\sharp}{\supset}\mathscr{H}_n^{\dagger}$ なる部分代数の階層が得られるが、この階層に関し、基礎体を $\overline{\mathbb{Q}(q)}$ に拡張した場合の既約表現の分岐則は以下の通りとなる。$\mathscr{H}_n$ の既約表現 $\pi_\lambda$ の $\mathscr{H}_n^{\dagger}$ への制限を $\pi_{\lambda\dagger}$ と表すと、明らかに $\pi_{\lambda\dagger}=\pi_{\lambda\sharp\dagger}=\pi_{\lambda\natural\dagger}=\pi_{\lambda\flat\dagger}$ である。ただし、$\pi_{\lambda\sharp\dagger},\pi_{\lambda\natural\dagger},\pi_{\lambda\flat\dagger}$ はそれぞれ、$\pi_{\lambda\sharp},\pi_{\lambda\natural},\pi_{\lambda\flat}$ からの制限である。そして、$\pi_{\lambda\dagger}{\cong}\pi_{\bar\lambda\dagger}{\cong}\pi_{\lambda^*\dagger}{\cong}\pi_{\lambda'\dagger}$ が従う。さらに、
$\lambda{\neq}\lambda^*,\ \lambda{\neq}\bar\lambda,\ \lambda{\neq}\lambda'$ ならば、$\pi_{\lambda\dagger}$ は既約。
$\lambda{\neq}\lambda^*,\ \lambda=\bar\lambda,\ \lambda{\neq}\lambda'$ ならば、$\pi_{\lambda\sharp\dagger}$ は次数の等しい互いに非同値な二つの既約表現 $\pi^{\pm}_{\lambda\sharp\dagger}(=\pi^{\pm}_{\lambda\dagger}$ とおく ) に既約分解する。
$\lambda{\neq}\lambda^*,\ \lambda{\neq}\bar\lambda,\ \lambda=\lambda'$ ならば、$\pi_{\lambda\sharp\dagger}$ は次数の等しい互いに非同値な二つの既約表現 $\pi^{\pm}_{\lambda\sharp\dagger}(=\pi^{\pm}_{\lambda\dagger}$ とおく ) に既約分解する。
$\lambda=\lambda^*,\ \lambda{\neq}\bar\lambda,\ \lambda{\neq}\lambda'$ ならば、$\pi^{\pm}_{\lambda\sharp\dagger}(=\pi^{\pm}_{\lambda\dagger}$ とおく ) はともに既約で次数は等しい。
$\lambda=\lambda^*,\ \lambda=\bar\lambda,\ \lambda=\lambda'$ ならば、$\pi^{+}_{\lambda\sharp\dagger},\pi^{-}_{\lambda\sharp\dagger}$ はそれぞれ次数の等しい互いに非同値な二つの既約表現 $\pi^{+\pm}_{\lambda\sharp\dagger}(=\pi^{+\pm}_{\lambda\dagger}$ とおく )、および $\pi^{-\pm}_{\lambda\sharp\dagger}(=\pi^{-\pm}_{\lambda\dagger}$ とおく ) に既約分解する。
以上が $\mathscr{H}_n^{\dagger}$ の既約表現の完全代表系となる。すなわち、トータルサイズ $n$ の二つのヤング図形の組を次の通りとする。

$$
\begin{aligned}
&\{\lambda_i,\lambda_i^*,\bar\lambda_i,\lambda_i',\mu_j,\bar\mu_j,\mu_j',\nu_k,\nu_k^*,\bar\nu_k,\kappa_l,\kappa_l^*,\kappa_l',\iota_m\}_{i,j,k,l,m}\\
&\lambda_i^*{\neq}\lambda_i,\bar\lambda_i{\neq}\lambda_i,\lambda_i'{\neq}\lambda_i,\quad \mu_j^*=\mu_j,\bar\mu_j{\neq}\mu_j,\mu_j'{\neq}\mu_j,\\
&\nu_k^*{\neq}\nu_k,\bar\nu_k{\neq}\nu_k,\nu_k'=\nu_k,\quad \kappa_l^*{\neq}\kappa_l,\bar\kappa_l=\kappa_l,\kappa_l'{\neq}\kappa_l,\\
&\iota_m^*=\bar\iota_m=\iota_m'=\iota_m.
\end{aligned}
$$

このとき、$\{\pi_{\lambda_i,\dagger},\pi^{\varepsilon}_{\mu_j,\dagger},\pi^{\varepsilon}_{\nu_k,\dagger},\pi^{\varepsilon}_{\kappa_l,\dagger},\pi^{\varepsilon\delta}_{\iota_m,\dagger}\}^{\varepsilon,\delta\in\{+,-\}}_{i,j,k,l,m,}$ は $\mathscr{H}_n^{\dagger}$ の $\overline{\mathbb{Q}(q)}$ 上の既約表現の完全代表系を成す。

# References


[1] R. Dipper and G. D. James, The $q$-Schur algebra, *Proc. London Math. Soc.* **59** (1989), 23–50.

[2] F. G. Frobenius, "Uber die Charaktere der symmetrischen Gruppe, *Sitzungberichte der K"oniglich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* (1900), 303-315; *reprinted in* "Gesammelte Abhandlungen" **3** (1968), 148–166.

[3] F. G. Frobenius, "Uber die Charaktere der alternirenden Gruppe, *Sitzungberichte der K"oniglich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* (1901), 516-534; *reprinted in* "Gesammelte Abhandlungen" **3** (1968), 167–179.

[4] P. N. Hoefsmit, Representation of Hecke algebras of finite groups with BN-pairs of classical type, *Thesis* (1974), University of British Columbia.

[5] N. Iwahori, On the structure of a Hecke ring of a Chevalley group over a finite field, *J. Fac. Sci. Tokyo Univ.,* **10** (1964), 215–236.

[6] H. Mitsuhashi, The $q$-analogue of the alternating group and its representations, *J. Algebra.* **240** (2001), 535–558.

[7] H. Mitsuhashi, $\mathbb{Z}_2$-graded Clifford system in the Hecke algebra of type B, *J. Algebra.* **264** (2003), 231–250.

[8] H. Mitsuhashi, Involutions of Iwahori-Hecke algebras and representations of fixed subalgebras, *to appear in Algebras and Representation Theory*