室蘭工業大学数理談話会報告書

東京大学大学院数理科学研究科・斉藤義久

講演日：２０１１年1月１３日

演題：クラスター代数とルート系

講演者：斉藤義久（東京大学大学院数理科学研究科）

演題にある「クラスター代数」は，代数群・量子群の研究をその契機として，２０００年前後にセルゲイ・フォーミン（米・ミシガン大学）とアンドレイ・ゼルビンスキー（米・ノースイースタン大学）によって導入された．その定義は複雑であり，意味を一言で述べるのは難しいが，敢えて言えば

“多変数有理関数体の部分集合であって，
ある特殊な構造（クラスター構造と呼ばれる）を持ったもの”

ということになろう．ここに言う “特殊な構造” は，変位（ミューテーション）と呼ばれる，有理関数体上の有理変換によって記述される．変位の与え方にはいくつか種類があり，ルート系と呼ばれる離散的なデータによって分類される．“代数” という名前が付いているために誤解されやすいが，特に「“クラスター代数” なる代数系が存在する」というわけではなく，代数群・量子群の研究の中に度々現れる，ある種の普遍的な構造（クラスター構造）を抽出したもの，と理解する方が正しい．

近年，代数群・量子群の分野だけでなく，それ以外の分野，例えば

- 有限次元代数の表現論
- 量子可積分系の理論や共形場理論
- 弦理論や代数幾何学
- 曲面の三角形分割

などの中にもクラスター構造が現れることがわかってきており，各分野においてクラスター代数（構造）の一般論を用いた解析が有効な研究手段を与えることが明らかになりつつある．

中でも最も有名な例は，二重対数関数の関数等式（dilogarithm identities）の証明であろう．

$$L(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} + \frac{1}{2} \log x \log(1-x)$$

はロジャースの二重対数関数 (Rogers dilogarithm) と呼ばれる．この $L(x)$ に対して，以下の２つの関数等式が知られている：

$$L(x) + L(1-x) = \frac{\pi^2}{6}. \tag{1}$$

$$L(x) + L(y) + L\left(\frac{1-x}{1-xy}\right) + L(1-xy) + L\left(\frac{1-y}{1-xy}\right) = \frac{\pi^2}{2}. \tag{2}$$

(1) はオイラーの恒等式，(2) はアーベルの恒等式（あるいは五角形恒等式）と呼ばれ，その出自はそれぞれ１８世紀，１９世紀に遡る，古典的な結果である．

他方，１９８０年代後半，数理物理学（共形場理論）の研究の中から，上記(1),(2)の一般化と言うべき大量の関数等式たち（dilogarithm identities）が，予想の形で提出された（バジャノフ・キリロフ・レシェティヒン）．このうち，いくつかの関数等式に関しては，関数論的な手法によって証明が行われたが，多くのものについては長らく手つかずの状態が続いていた．このような状況は中西知樹（名古屋大学）らにより，打開された．２００９年，中西らは，dilogarithm identities の背後にクラスター代数（構造）によって記述される，ある種の対称性があることを見抜き，クラスター代数でよく知られた手法（categorification と呼ばれる）を巧みに用いることによって，dilogarithm identities の統一的な証明を与えた．これは，クラスター代数の他分野への応用という意味で，顕著な成功例である．

この例からもわかるように，近年では『“クラスター構造” とは，数学や理論物理学においてしばしば現れる，ある種の普遍的な構造である』と理解されつつあると言って良い．また，このような背景から，クラスター代数（構造）に関する研究は，広範な分野の研究者によって活発に，かつ多角的に行われている，という現状にある．

このような現状を踏まえて，実際の談話会では，

- コンウェイ・コクセター・フリーズ（一種の数字ゲーム）
- クイバー（箙）を用いるもの（クイバー・ミューテーション）
- グラスマン多様体の関数環

等の簡単な具体例をいくつか紹介し，これらの具体例を通じて，

(a) クラスター構造とは，どんなものか？

(b) クラスター構造が存在することで，どんな帰結（ご利益）が得られるか？

の２点を中心に，解説を行った．

また，講演の最後に，クラスター代数と他分野との関係（上記の dilogarithm identities 等）についても言及し，クラスター代数を取り巻く最新の状況を説明した．