平板後流の不安定性と振動数選択機構

伊藤 信毅（首都大学東京）

１．複素特性曲線法

層流から乱流への遷移は流れの不安定から始まる。レイノルズ数がある限界を超えて大きくなると流れに加えられた微小攪乱は下流方向に伝播しながら成長する。複素特性曲線法は境界層や物体の後流などの粘性流中における攪乱の伝播と成長を記述する一つの方法である。Whitham[1)]によって確立された運動学的波動理論は、分散波動の振動数と波数を位相関数の時間と空間座標に関する偏導関数として定義し、定義式から位相関数を消去して得られる適合条件と、波動を支配する運動方程式の解として導かれる振動数と波数の関係、即ち分散関係式を連立させることで波動の伝播を記述するものである。この理論は非散逸系の波動を対称としているので、適合条件も分散式も実数の範囲で議論されており、そのままでは流れの安定性問題には適用できない。流れの不安定から発生する波動攪乱は増幅や減衰を伴うため、複素数の適合条件と分散式に支配される。Whitham の理論を複素領域に拡張したものが複素特性曲線法 [2)]である。

いま、流れ場が定常で、かつ下流方向に緩やかに変化する場合を考えると、分散関係として振動数が波数と下流方向座標の関数 $\omega = \Omega(\alpha, X)$ の形に表される。その振動数の波数に関する偏導関数が群速度 $C = \Omega_\alpha(\alpha, X)$ である。分散式を適合条件 $\partial\alpha/\partial T + \partial\omega/\partial X = 0$ に代入すると、特性曲線 $dX/dT = C$ に沿って、波数は変化するが、振動数は不変であることが分かる。そこで、分散式と群速度の定義式から波数を消去して、群速度を下流方向座標と振動数の関数 $C = \Omega_\alpha\{\alpha(X,\omega), X\}$ に表しておく。攪乱が導入された位置 X_0 から攪乱を観測する下流位置 X_1 まで、群速度の逆数を空間座標で積分すると、攪乱の中の当該振動数成分が導入されてから観測されるまでに要する時間 $T = \int_{X_0}^{X_1} dX / C(X,\omega)$ が得られる。一般に振動数も群速度も複素数であるから、積分の結果として定まる時間も複素数値を取るが、その虚部を零にするような複素振動数成分だけが実現され、観測される。時間の虚部に関するこの要求は解の実現条件と呼ばれ､それによって複素振動数の実部と虚部が関係付けられる。さらに、観測される振動数成分の成長は攪乱導入点から観測点までの特性曲線に沿う位相関数虚部の変化として計算することができる。

２．絶対全体不安定

絶対不安定や全体不安定と呼ばれる現象は群速度の零点に関係して発生する。Huerre と Monkewitz[3)]は群速度の零点を波数と振動数の間の写像における鞍部点と捉え、その点で振動数の虚部（時間増幅率）が正の値を持つときに強い不安定が起きることを説明している。この現象を複素特性曲線法で記述すると、複素群速度の零点は積分路上の特異点に

対応し、特異点近傍における解の振舞いが現象の特徴を明確にする。

特性方程式の積分路上に群速度の零点 X_S が存在する場合に、X_S 近傍における群速度 C の振舞いは２つの場合に分けられる。いま $E(X,\omega)=\Omega_X\{\alpha(X,\omega),X\}$ と書くとき、与えられた ω に対して $E(X_S,\omega)\neq 0$ の場合には $C\sim|X_S-X|^{1/2}$ となって、その逆数の積分値は有限な大きさを持つが、$E(X_S,\omega)=0$ の場合には $C\sim|X_S-X|$ となるために $X\rightarrow X_S$ に対して積分は対数的に発散する。後者が絶対全体不安定に対応するもので、不安定の条件は連立方程式 $C(X,\omega)=0,\quad E(X,\omega)=0$ の解 $X=X_S$, $\omega=\omega_S$ が存在し、その時間増幅率 $\mathrm{Im}[\omega_S]$ が正の値を持つことである [4]。積分路上にこれらの条件を満たす対数特異点が存在するとき、X が X_S に到達するには無限の時間が必要で、その間にこの振動数成分は正の時間増幅率に従って無限に成長を続ける。その結果、ほとんど単色的な変動が線形理論の範囲を超えるような大振幅に達することになり、これは一種の振動数選択機構である。

３．平板後流における対数特異点

薄い平板の後流は対数特異点が特性方程式の積分路上あるいはそのごく近傍に現れる最も簡単な例である。条件 $E(X,\omega)=0$ が分散式の X 微分を含むことから、対数特異点の計算には流れ場の下流方向変化に関する知識が必要になる。薄い対称翼や平板の後流は大きな剥離を伴わないために､その流れ方向変化を滑らかな関数で模擬できるという利点がある。

平板後流の X 方向変化は、速度分布形、最大欠損速度および速度の半値幅の変化に分解できるので、それぞれを簡単な関数で模擬する。すなわち、速度分布形には下流遠方で成立する漸近速度分布 [5]、Mattingly & Criminale[6]の sech モデル、および Koch[7]の tanh モデルを用い、欠損速度 Q と半値幅レイノルズ数 R にはそれぞれ一つのパラメターを含み、物体後縁の条件と下流における漸近解との接合条件を満たす X の２次式（Q は上に凸の放物線、R は下に凸の放物線）で近似した。安定計算と対数特異点の特定計算から、平板後流における対数特異点は最大欠損速度の極大点と半値幅レイノルズ数の極小点の間の実軸近傍に現れることが分かった。

参考文献

1) Whitham, G.B. 1974 Linear and Nonlinear Waves. New York: John Wiley.
2) Itoh, N. 1996 Fluid Dyn. Res. **18**, 337-354.
3) Huerre, P. and Monkewitz, P.A. 1990 Ann. Rev. Fluid Mech. **22**, 473-537.
4) Itoh, N. 2002 Trans.Jpn Soc. Aero. Space Sci. **44**, 96-105.
5) Schlichting, H. 1968 Boundary Layer Theory. McGraw-Hill.
6) Mattingly, G.E. & Criminale, W.O. 1972 J. Fluid Mech. **51**, 233-272.
7) Koch, W. 1985 J. Sound and Vibration **99**, 53-83.