ヘシアンが恒等的に消える斉次多項式について

渡辺純三
東海大学理学部数学科
2010.11.17. 室蘭工業大学・談話会

1　なぜヘシアンが消える多項式に興味を持つのか

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ を変数とし、$R = K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ を多項式環とする．$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ と置き、$Q = K[\partial_1, \partial_2, \cdots, \partial_n]$ とする．($K = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$.) $F \in R$ を斉次多項式とする．

$$QF = \{q(\partial_1, \partial_2, \cdots, \partial_n)F | q(\partial_1, \partial_2, \cdots, \partial_n) \in Q\}$$

と置く．QF は F の高次偏導関数の全体からなる有限次元ベクトル空間である．QF は、R のから受けついだ次数ごとに分解するので、R の次数付き部分ベクトル空間である．このベクトル空間は斉次多項式 Q を理解するために非常に重要な役割を果たす.

斉次多項式 $F \in R$ の Annihilator を次の通り定める:

$$\mathrm{Ann}_R(F) = \{p(x_1, \cdots, x_n) \in R | p(\partial_1, \cdots, \partial_n)F = 0\},$$

$$\mathrm{Ann}_Q(F) = \{q(\partial_1, \cdots, \partial_n) \in Q | q(\partial_1, \cdots, \partial_n)F = 0\}.$$

言うまでもなく、R と Q は、$x_i \leftrightarrow \partial_i$ で可換環として同型、またその同型対応で、イデアル $\mathrm{Ann}_R(F)$ と $\mathrm{Ann}_Q(F)$ も対応する．実は、このようにして得られた $R/\mathrm{Ann}_R F$ は 0 次元ゴレンスタイン環であり、0 次元ゴレンスタイン環はこの様にして得られることが知られている．すなわち対応

$$\begin{aligned} \{\text{斉次多項式}\} &\quad \rightarrow \quad \{\text{次数付き 0 次元ゴレンスタイン環}\} && (1) \\ F &\quad \mapsto \quad A := R/\mathrm{Ann}_R F (\cong QF^*) && (2) \end{aligned}$$

は一対一対応である．

R の像としての $A = R/\mathrm{Ann}_R F$ と、R の部分空間 $QF \subset R$ を比較して見よう．実は、R の部分空間 $QF \subset R$ の基底を $A = R/\mathrm{Ann}_R F$ の代表と考えて良い．ただし、QF を R-加群と見るときは、$f(x) \in R$ の作用は、R と Q を同一視した上での作用となる．つまり、変数 x を偏微分 ∂ に置き換えてから作用させる．実際には、QF を Q-加群とみるのが簡単なので、R の商環 A の代わりに Q の像としての QF を考えたほうが解りやすい．(R-加

群としては、QF と $A = R/\mathrm{Ann}_R F$ は “双対” になっている．) QF を A-加群と見るとき、QF を A の標準加群という．A_i で A の次数 i の部分を表す．また、Q_i, R_i で、 それぞれ、Q, R の次数 i の部分を表わす．$Q_iF \cong A_{d-i}$ である．実は、次数付きベクトル空間として

$$R = QF \oplus \mathrm{Ann}_R(F)$$

と分解する．重要なことは次の事実だ:

Lemma 1. *Let* $d = \deg F$. *Then* $\dim_K Q_jF = \dim_K Q_{d-j}F$ *for* $0 \le j \le [d/2]$.

Proof. Let $r = \dim_K Q_jF$. Then there exist r polynomials $q_\lambda(\partial) \in Q_j$ such that

$$q_\lambda(\partial)F, \ \lambda = 1, 2, \cdots, r$$

are linearly independent. We may assume that $q_\lambda(\partial)$ are all monomials in $\partial_1, \cdots, \partial_n$. That the elements $q_\lambda(\partial)F$ are linearly independent means that there exist r monomials $p_\mu(x)$ in $x_1, \cdots, x_n$ of degree $d - j$ such that if $a_{\mu\lambda}$ is the coefficient of p_μ in $q_\lambda F$, then $\det(a_{\mu\lambda}) \ne 0$. Notice that $a_{\mu\lambda}$ differs from $p_\mu(\partial)q_\lambda(\partial)F$ only by an integer multiple (the same integer for a fixed μ). Thus it is the same as saying that $\det(p_\mu(\partial)q_\lambda(\partial)F) \ne 0$. Interchanging the roles of $q_\lambda(\partial)$ and $p_\mu(x)$ we get the assertion. $\square$

0 次元ゴレンスタイン環 A が 強いレフッシェツ性 (SLP) を有する とは、一次式 l が存在して、任意の $0 \le i \le [d/2]$ について次の条件 (i) をみたすことである．

条件 (i) 写像 $l^{d-2i} : A_i \to A_{c-i}$ は全単射である．

(SLP は strong Lefschetz property の略．A を代数多様体のコホモロジー環と考えるなら、SLP が成立することは、Hard Lefschetz Theorem が成り立つこと．)

SLP の条件 (i) をその双対でいうと、適当な $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in K^n$ に対して、

$$D = \xi_1\partial_1 + \xi_2\partial_2 + \cdots + \xi_n\partial_n$$

と置くとき、

$$D^{d-2i} : Q_iF \to Q_{d-i}F$$

が全単射となることである．

$D^dF(x_1, \cdots, x_n) = d!F(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ だから、SLP の条件 (0) は自動的に成り立つ．また、$\partial_1F, \cdots, \partial_nF$ が一次従属であることと、変数の一次変換で F から変数の一つを消去でき

ることは同値である．今、$\partial_1 F, \cdots, \partial_n F$ が一次独立であるとすると、$Q_1 F$ と $A_1 = Q_{d-1}F$ の双対性により、$x_1, \cdots, x_n$ は $Q_{d-1}F$ の基底である．（従って $Q_{d-1}F = R_1$）これらの基底を使って写像

$$D^{d-2} : Q_1 F \to Q_{d-1}F$$

を行列で表すと

$$\left((d-1)! \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \right)$$

となる．よって次の補題が成り立つ．

Lemma 2. $\partial_1 F, \cdots, \partial_n F$ が一次独立であるとする．このとき、

SLP の条件 (1) が成立しない $\Leftrightarrow$ F のヘシアンは恒等的に消える．

従って、上記の一対一対応 (1) でヘシアンが消える斉次多項式は SLP の第一条件がみたされないゴレンスタイン環 A に（丁度）対応する．同様にして $D^{d-2i} : Q_i F \to Q_{d-i}F$ を、双対基底を用いて表すと F の高次ヘシアンが定義される．この様な意味で、ゴレンスタイン環の SLP を解明しようとするとヘシアンが消える多項式の理解が必要になる．

1851 年と 1856 年に，Otto Hesse (1811 - 1874) は Crelle Journal に２編の論文を書き，Hessian が恒等的に消える斉次多項式は，変数の一次変換により変数の一つを消去出来ると主張し「証明」を与えた．しかし，この「証明」は難解（実は誤り）であり、当初より証明の正しさは疑問視されていたようだ．一方、２変数の場合及び２次式の場合は Hesse の主張は正しいことも知られていた．1875 年 Moritz Pasch は３変数３次式及び４変数３次式では Hesse の主張は正しいことを証明した．1876 年 Lutwig Paul Gordan と Max Neother は，Mathematische Annalen 第 10 巻でこの問題に完全な答えを与えた．彼らの結果を纏めると次の様になる．

THEOREM (Gordan-Noether, 1876)

(A) Hessian が恒等的に消える斉次多項式は，変数の双有理変換で変数の一つを消去出来る．

(B) 変数の数が４以下の場合は，Hessian が恒等的に消える斉次多項式は，変数の一次変換によって変数の一つを消去出来る．

(C) ５変数の場合に，Hessian が恒等的に消える多項式は全て決定できる．（実際の形が書いてある．）

１９世紀に得られた結果は、重要なものであれば、当然現代の数学に何らかの形で反映されているはずだ．しかしこの論文に関していうと、証明の手法のみならずその結果さえも忘れられているように思われる．Gordan-Noether の論文には一般化して教科書に載せても良いと思もわれる話題が沢山登場する．とくに、ここに使われている “Syzygy 論” は、Hilbert's Syzygy Theorem（1880）（多項式環上の任意の加群は有限自由分解も持つ）より数年も早いことに驚かされる．しかもその扱い方は今日の可換環論では全く無視されている．その意味でも Gordan-Noether の論文は実に興味深い．また、Hesse はその主張に簡単な反例があるにも関わらず、“信念に基づいてそれを証明してしまった” ことも興味深い．間違えたのだが、明らかにヘシアンという言い方はこの論文に由来しているのだろう．そうだとすると、「間違っていても先に言った方が得だ！」ということになる．Gordan と Noether は Hesse の弟子である．また、Noether の子 Emmy は Gordan の生涯ただ一人の弟子であったと言うことだ．Gordan と Noether が彼らの結果に到達するためには相当の年月を要したに違いない．事実、Hesse の論文から Gordan-Noether の論文まで 20 年が経過している．

Gordan-Noether の論文を解読することはなかなか難しい．その理由は、(1) 論文のスタイルが現代のそれとは全く違う．(2) 当時の常識が何であったか分からない．(3) この論文の鍵 “die Functionen Φ” と言う概念そのものが分かりにくい．(4) 論法に現代的な厳密さがない．(5)「数学は進歩している、従って、昔の論文を理解するのは簡単なはすだ」という思い込みがある、などだろう．その上これはドイツ語で書かれている．

それにもかかわらず、最近になってやっとこの論文を理解することができた．それは「鏡映群と可換環論研究会」に負うところが大きい．

Gordan-Noether の論文 [1] の解説方法として次の方針をとる．

(1) 一般論で扱える部分は（Gordan-Noether の論文とは独立に）一般論として扱う．

(2) 定義を明快にする．

(3) 個々の命題（今の数学でいう命題とか補題とか）を正確に述べる．

要するに今日的なスタイルでこの論文を書き換えようということだ．しかし、この論文を英語に直訳することもそれなりに意味のある仕事に思える．

2　（代数的）線形偏微分方程式

K を標数ゼロの体とし、$R = K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ を多項式環とする．$a_1, a_2, \cdots, a_n \in K$, $\mathbf{a} := (a_1, \cdots, a_n) \neq \mathbf{0}$ とし、微分方程式

$$a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} f + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} f + \cdots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n} f = 0 \tag{3}$$

を考える．K は標数ゼロの体とする．

この微分方程式の R における解集合を $\mathrm{Sol}(\mathbf{a}; R)$ で表す．$\mathrm{Sol}(\mathbf{a}; R)$ は R の部分環である．この微分方程式は、変数変換すれば本質的に

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f = 0$$

と同じだから、この場合の解は $\mathrm{Sol}(\mathbf{a}; R) = K[x_2, \cdots, x_n]$ である．言い換えれば、上記 (3) の解は　R の $(n-1)$ 個の斉次一次式で生成される部分環である．変数変換しないでこの部分環 $\mathrm{Sol}(\mathbf{a}; R)$ を記述すると

$$K[\Delta_{ij} | 1 \leq i < j \leq n]$$

ただし、

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ x_i & x_j \end{vmatrix}$$

となる．仮に、$a_1 \neq 0$ であれば、

$$\Delta_{12} = a_1 x_2 - a_2 x_1$$

$$\Delta_{13} = a_1 x_3 - a_3 x_1$$

$$\vdots$$

$$\Delta_{1n} = a_1 x_n - a_n x_1$$

を生成元として選べばよい．任意の Δ_{ij} は、Δ_{1i} と Δ_{1j} の一次結合で表される：

$$\Delta_{ij} = \frac{1}{a_1}(a_j \Delta_{1i} - a_i \Delta_{1j}).$$

$$2 \leq i < j \leq n.$$

つぎに、連立偏微分方程式：

$$\begin{cases} a_1^{(1)}\frac{\partial}{\partial x_1}f + a_2^{(1)}\frac{\partial}{\partial x_2}f + \cdots + a_n^{(1)}\frac{\partial}{\partial x_n}f = 0 \\ a_1^{(2)}\frac{\partial}{\partial x_1}f + a_2^{(2)}\frac{\partial}{\partial x_2}f + \cdots + a_n^{(2)}\frac{\partial}{\partial x_n}f = 0 \end{cases} \tag{4}$$

を考える．係数行列 $(a_j^{(i)})_{i=1,2;j=1,\cdots,n}$ は階数 2 とすれば、変数の一次変換で

$$\frac{\partial}{\partial x_1}f = \frac{\partial}{\partial x_2}f = 0$$

と考えてよいので、この場合は明らかに R における解集合は

$$\mathrm{Sol}(\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{a}^{(2)}; R) = K[x_3, x_4, \cdots, x_n]$$

である．変数変換をしないで解集合を記述するとするためには

$$\Delta_{ijk} = \begin{vmatrix} a_i^{(1)} & a_j^{(1)} & a_k^{(1)} \\ a_i^{(2)} & a_j^{(2)} & a_k^{(2)} \\ x_i & x_j & x_k \end{vmatrix}$$

と置き

$$\mathrm{Sol}(\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{a}^{(2)}; R) = K[\Delta_{ijk} | 1 \leq i < j < k \leq n]$$

とすれば良い．

仮に $\begin{vmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} \end{vmatrix} \neq 0$ であれば、

$$\{\Delta_{12\lambda} | \lambda = 3, 4, \cdots, n\}$$

を環としての生成元に選ぶことができる．

$$\delta_{ij} = \begin{vmatrix} a_i^{(1)} & a_j^{(1)} \\ a_i^{(2)} & a_j^{(2)} \end{vmatrix}$$

と置くと

$$\Delta_{12\lambda} = \delta_{12}x_\lambda - \delta_{1\lambda}x_2 + \delta_{2\lambda}x_1.$$

である．$\lambda = i, j, k$ を書き出すと、

$$\begin{aligned}\Delta_{12i} &= \delta_{12}x_i - \delta_{1i}x_2 + \delta_{2i}x_1 &(5)\\ \Delta_{12j} &= \delta_{12}x_j - \delta_{1j}x_2 + \delta_{2j}x_1 &(6)\\ \Delta_{12k} &= \delta_{12}x_k - \delta_{1k}x_2 + \delta_{2k}x_1 &(7)\end{aligned}$$

となり、任意の $1 \leq i < j < k \leq n$（$(ij) = (12)$ を除く）につき、Δ_{ijk} は、

$$(5) \times \delta_{jk} - (6) \times \delta_{ik} + (7) \times \delta_{12}$$

を計算することで、$\Delta_{12\lambda}$ の一次結合で表すことができる．すなわち、

$$\begin{aligned}\delta_{jk}\Delta_{12i} - \delta_{ik}\Delta_{12j} + \delta_{ij}\Delta_{12k} &= \delta_{12}(\delta_{ij}x_k - \delta_{ik}x_j + \delta_{jk}x_i) &(8)\\ &= \delta_{12\lambda}\Delta_{ijk} &(9)\end{aligned}$$

を得る．(式 (5)(6)(7) で、変数の x_i, x_j, x_k にだけ注目して Δ_{ijk} を求めると、x_1, x_2 は Plücker 関係式により消去される．)

さらに一般化して、次の方程式を考える．

$$\left\{\begin{array}{l} a_1^{(1)}\frac{\partial}{\partial x_1}f + a_2^{(1)}\frac{\partial}{\partial x_2}f + \cdots + a_n^{(1)}\frac{\partial}{\partial x_n}f = 0 \\ a_1^{(2)}\frac{\partial}{\partial x_1}f + a_2^{(2)}\frac{\partial}{\partial x_2}f + \cdots + a_n^{(2)}\frac{\partial}{\partial x_n}f = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\vdots \\ a_1^{(r)}\frac{\partial}{\partial x_1}f + a_2^{(r)}\frac{\partial}{\partial x_2}f + \cdots + a_n^{(r)}\frac{\partial}{\partial x_n}f = 0 \end{array}\right. \tag{10}$$

（係数行列は階数 r とする.）

解の集合は $n-r$ 個の１次式で生成される R の部分環であるのは間違いないので、

$$\mathrm{Sol}(\mathbf{a}^{(1)}, \cdots, \mathbf{a}^{(r)}R) = K[\Delta_{j_1 j_2 \cdots j_r} | 1 \leq j_1 \leq j_2 \cdots \leq j_{r+1} \leq n]$$

となる．ただし、

$$\Delta_{j_1 j_2 \cdots j_r j_{r+1}} = \begin{vmatrix} a_{j_1}^{(1)} & a_{j_2}^{(1)} & \cdots & a_{j_{r+1}}^{(1)} \\ a_{j_1}^{(2)} & a_{j_2}^{(2)} & \cdots & a_{j_{r+1}}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j_1}^{(r)} & a_{j_2}^{(r)} & \cdots & a_{j_{r+1}}^{(r)} \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{r+1} \end{vmatrix}$$

である．この中から、$n-r$ 個の一次独立の一次式を選ぶなら、仮に

$$\delta_{123\cdots r}=\begin{vmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & \cdots & a_r^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & \cdots & a_r^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{(r)} & a_2^{(r)} & \cdots & a_r^{(r)} \end{vmatrix}\neq 0$$

として、

$$\Delta_{123\cdots r\lambda}=\delta_{12\cdots r}x_\lambda-\delta_{12\cdots\hat{r}\lambda}x_r+\cdots\pm\delta_{23\cdots\lambda}x_1,\lambda=r+1,r+2,\cdots,n$$

を選べば良い．

以上は微分方程式の係数が定数の場合であった．係数を変数に置き換えても同じ結果を得る：

Theorem 3. nr 個の不定元 $\{u_j^{(i)}\}_{i=1,2,\cdots,r;j=1,2,\cdots,n}$ と、n 個の変数 $x_1,\cdots,x_n$ を導入し、$R=K[\{u_j^{(i)}\}][x_1,x_2,\cdots,x_n]$ と置く．すなわち、R は、$K[\{u_j^{(i)}\}]$ を係数環とする n 変数多項式環である．R における微分方程式

$$\left\{\begin{array}{c} u_1^{(1)}\frac{\partial}{\partial x_1}f+u_2^{(1)}\frac{\partial}{\partial x_2}f+\cdots+u_n^{(1)}\frac{\partial}{\partial x_n}f=0 \\ u_1^{(2)}\frac{\partial}{\partial x_1}f+u_2^{(2)}\frac{\partial}{\partial x_2}f+\cdots+u_n^{(2)}\frac{\partial}{\partial x_n}f=0 \\ \vdots \\ u_1^{(r)}\frac{\partial}{\partial x_1}f+u_2^{(r)}\frac{\partial}{\partial x_2}f+\cdots+u_n^{(r)}\frac{\partial}{\partial x_n}f=0 \end{array}\right. \tag{11}$$

の解集合は、$K[\{u_j^{(i)}\}][\{\Delta_{j_1j_2\cdots j_{r+1}}\}]$ である．ここに、

$$\Delta_{j_1j_2\cdots j_{r+1}}=\begin{vmatrix} u_{j_1}^{(1)} & u_{j_2}^{(1)} & \cdots & u_{j_{r+1}}^{(1)} \\ u_{j_1}^{(2)} & u_{j_2}^{(2)} & \cdots & u_{j_{r+1}}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{j_1}^{(r)} & u_{j_2}^{(r)} & \cdots & a_{j_{r+1}}^{(r)} \\ x_{j_1} & x_{j_2} & \cdots & x_{j_{r+1}} \end{vmatrix}.$$

添え字は、$1\le j_1<j_2<\cdots<j_{r+1}\le n$ なる番号を全て動く．

この命題は定数係数の場合から類推すれば当然そうなるはずのことだが、可換環論として厳密に証明するには determinatal ideal の syzygy 論が必要だ．ここでは $r=1$ に限り determinantal ideal の幾つかの事実を仮定した上で証明の方針を示す．

Proof. 記号を改めて、$R = K[u_1, u_2, \cdots, u_n][x_1, x_2, \cdots, x_n]$ とし、１つの微分方程式

$$u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} f + u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} f + \cdots + u_n \frac{\partial}{\partial x_n} f = 0$$

の R における解集合を $\mathrm{Sol}(\mathbf{u}, R)$ とする．

$$\mathrm{Sol}(\mathbf{u}, R) = K[u_1, u_2, \cdots, u_n][\{\Delta_{ij}\}_{1 \le i < j \le n}]$$

を示す．

一般に、R を環とし、$(h_1, h_2, \cdots, h_n)$ を R の元列 (実際にはイデアルの極小生成系) とするとき、$\phi((f_1, f_2, \cdots, f_n)) = f_1 h_2 + f_2 h_2 + \cdots + f_n h_n$ で定義される写像

$$\phi : R^n \to R$$

の核 (または、核の元) を $(h_1, \cdots, h_n)$ の syzygy という．“syzygy” を字引で引くと (天文学用語の)「朔望」という言葉に翻訳される.「朔望」の意味はそのままにして、さらに別の解説をみると、「３つの天体が一直線に並ぶこと」また「２つのことが同時に起きること」とある．この解説だと納得できるだろう．事実、

$$(\cdots - h_j, \cdots, h_i, \cdots)$$

は syzygy の典型だ．($\cdots$ はすべてゼロを表す．i 番目に $-h_j$ が、j 番目に h_i がいる．) この形の syzygy を「自明な syzygy」 (または、“Koszul relation”) という．すべての syzygy は、有限個の syzygy の (R の元を係数とする) 一次結合で表される．(可換環論の常識だが大定理．)「syzygy を求める」とは「$\mathrm{Ker}\,\phi$ の基底をすべて決定する」と言うことである．

閑話休題、本論に戻る．今の場合、$u_1, u_2, \cdots, u_r$ の S 上の syzygy を考えることが必要になる．この R 上の syzygy は自明なものに限る．ところが、$u_1, u_2, \cdots, u_n$ の S 上の syzygy は、自明なものの他に、

$$\begin{vmatrix} u_i & u_j & u_k \\ u_i & u_j & u_k \\ x_i & x_j & x_k \end{vmatrix} = 0$$

を第１行で展開した関係式もある．すなわち、

$$\Delta_{jk} u_i - \Delta_{ik} u_j + \Delta_{ij} u_k = 0.$$

(R の元を係数に使うならこれは自明なものの一次結合で表されるのだが、係数を S の元に限ると Koszul relation だけでは不十分である．) これを、$u_1, \cdots, u_r$ の “determinantal relation" と呼ぶことにする．実は、$u_1, \cdots, u_r$ の S 上の syzygy は、Koszul relation と determinantal relation に限ることが証明できる．このことを認めた上で上記の命題を証明しよう．

証明すべきことは、

$$F \in R \text{ and } \sum_{i=1}^{r} u_i \frac{\partial}{\partial x_i} F = 0 \quad \Rightarrow F \in S$$

である．F は $x_1, \cdots, x_r$ に関して斉次式と仮定して良い．(x) に関する次数 $\deg_{(x)} F$ の帰納法による．$F_i = \frac{\partial}{\partial x_i} F$ と置く．$(F_1, \cdots, F_n)$ は、$(u_1, \cdots, u_n)$ の syzygy である．しかも、すべての $j \leq n$ について、$\frac{\partial}{\partial x_j}(F_1, \cdots, F_n) \in \mathrm{Sol}(\mathbf{u}, R)$ である．実際、$\sum u_i \frac{\partial}{\partial x_i} F = 0$ に $\frac{\partial}{\partial x_k}$ を施しても、u_j は定数として扱えるのでそのまま等号が成立する．よって帰納法の仮定を使うことができる．すなわち、F_i の一つ一つは S の元であり $(F_1, F_2, \cdots, F_n)$ は、$u_1, \cdots, u_n$ の S の上の syzygy である．従ってそれは、Kosuzul relation と determinantal relation の S-係数の一次結合である．F は、$x_1, \cdots, x_n$ に関して斉次であるから、オイラー微分を考えれば、$(F_1, \cdots, F_n)$ と $(x_1, \cdots, x_n)$ の "内積" として F が表わせる．すなわち、

$$(\deg_{(x)} F) F = x_1 F_1 + x_2 F_2 + \cdots + x_n F_n$$

である．$(u_1, \cdots, u_n)$ の determinantal relation と $(x_1, \cdots, x_n)$ との "内積" は 0 となり、Koszul relation と $(x_1, \cdots, x_n)$ との "内積" は丁度 Δ_{ij} となる．従って、$F \in S$ が示された． □

3 Plücker 座標の関係式と Syzygy

今までの記号を使う．可換環

$$S := K[\{u_j^{(i)}\}][\{\Delta_{j_1 j_2 \cdots j_{r+1}}\}]$$

と置く．S は多項式環の部分環として表されている．S を多項式環の商として表すとするとどのようになるのだろう．

M を $r \times n$ 行列とし、$I(M;t)$ で、$t \times t$ の小行列式全体の集合（または、それが生成するイデアル）を表すことにする．簡単にするため、$r = 1$ とする．いま、M, M' を次の行列とする．

$$M = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n & u_{n+1} \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$M' = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n & 0 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & 1 \end{pmatrix}$$

M, M' はともに $2 \times (n+1)$ の行列であり、$I(M';2)$ はちょうど、

$$\{u_i | i = 1, 2, \cdots, n\} \cup \{\Delta_{ij} = a_i x_j - a_j x_i | 1 \leq i < j \leq n\}$$

と一致する．また、$I(M;2)$ と $I(M';2)$ とは 同じ関係式を持つ．可換環でいえば、

$$\begin{aligned} K[u_1, u_2, \cdots, u_n, x_1, x_2, \cdots, x_n]/I(M';2) \quad &\cong \\ K[u_1, u_2, \cdots, u_{n+1}, x_1, x_2, \quad \cdots, \quad &x_{n+1}]/(I(M;2), u_{n+1}, x_{n+1} - 1) \end{aligned}$$

である．従って、$I(M';2)$ の代わりに $I(M;2)$ の関係式を考えれば良い．この関係式は、"Plücker relation" として知られている．

すなわち、Δ_{ij} の間の関係式は

$$\Delta_{12}\Delta_{34} - \Delta_{13}\Delta_{24} + \Delta_{14}\Delta_{23} = 0$$

につきる．ただし、番号 $1, 2, 3, 4$ は、すべての番号の 4 つ組 i, j, k, l を動く．

添え字の組 (ij) は

$$(ij) \leq (kl) \Leftrightarrow i \leq k, j \leq l$$

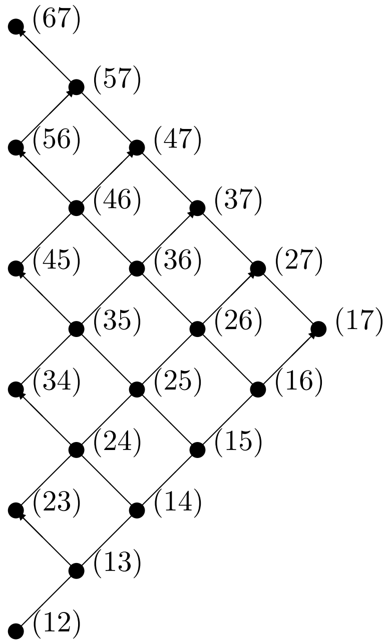
により半順序集合である．その Hasse 図式が Figure 1.

このことから、Δ_{ij} のモノミアルのうち、比較可能な添え字だけが現れるものを選べばそれが、無限次元ベクトル空間 $K[\Delta_{ij}]$ の K 上の基底になる．たとえば、(13) と (24) は比較できないが、

$$\Delta_{23}\Delta_{14} = -\Delta_{12}\Delta_{34} + \Delta_{13}\Delta_{24}$$

であり、この右辺に現れる単項式は、いずれも、添字が比較できるもの 2 つの積である．

Figure. 1



以上で、Plücker 座標の algebraic relation が解ったのだが、代数的な関係式があれば、代数的な関係式から、syzygy が得られる．事実、$y_1, y_2, \cdots, y_m$ を新しい変数とし、$g(y_1, y_2, \cdots, y_m) \in K[y_1, y_2, \cdots, y_m]$ を多項式、$g(h_1, \cdots, h_m) = 0$ とする．このとき g は斉次多項式なので、オイラー微分を考えると

$$(\deg g)\, g(y_1, y_2, \cdots, y_m) = \frac{\partial g}{\partial y_1} y_1 + \frac{\partial g}{\partial y_2} y_2 + \cdots + \frac{\partial g}{\partial y_m} y_m$$

となる．この式で $y_1, \cdots, y_m$ を $h_1, \cdots, h_m$ に置き換えると $h_1, \cdots, h_m$ の syzygy が得られる．実は、この方法で、Kosuzul relation 以外の全ての syzygy を得ることができる．それは次の定理による.（記号は改めて使う.）

Theorem 4. $S = K[y_1, \cdots, y_m]$ を多項式環とし、$\overline{S} = S/I$ とする．このとき、

$$\dim H^1_{S/I}(\overline{y_1}, \ldots, \overline{y_m}) = \mu(I)$$

である.（H^1 の意味は、“all syzygy” mod “trivial syzygy” である．$\overline{y_i} = h_i$ として応用する．$\mu(I)$ は、I の生成元の個数の意味で、結局、$h_1, \cdots, h_m$ の代数的関係式の個数になる.）

談話会での本論は、ヘシアンが恒等的に消える斉次多項式についてでしたが、本論に入る前にここで終わってしまいました．以下は、談話会の補足をさせて頂きます。

4 Die Functionen Φ or 自己消滅微分方程式 (SVDE)

$h_1, h_2, \cdots, h_n \in K(x_1, \cdots, x_n)$ を係数とする線形微分方程式を考える.

$$(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n})F = 0 \tag{12}$$

の解を $\mathrm{Sol}(\mathbf{h}, R)$ とする.（$h_1, \cdots, h_n$ は線形従属であることもあり得る.）

Definition 5. 上記の微分方程式 (12) が、“self-vanishing” とは、

$$h_i \in \mathrm{Sol}(\mathbf{h}, R)$$

であること.

Remark 6 (Akamatsu)**.** 微分方程式 (12) が self-vanishing であることと、その特性曲線が直線であることは同値である.

Example 7. A constant vector $(h_1, \cdots, h_n) \in K^n$ gives an SVDE.

Example 8. Let $h_i \in R$. Suppose that $(h_1, \cdots, h_n)$ satisfy the following conditions.

1. $h_1 = \cdots = h_r = 0$, for some integer r; $1 < r < n$.
2. The polynomials $h_{r+1}, \cdots, h_n$ do not involve the variables $x_{r+1}, \cdots, x_n$.

Then the polynomials $(h_1, \cdots, h_n)$ gives an SVDE. この形を、「係数・変数分離形」ということにする.

Lemma 9. (12) が *self-vanishing* とする．このとき、全ての i について、

$$h_i(h_1, h_2, \cdots, h_n) = 0$$

である.

5 証明の概略

K を 標数 0 の体とする．$F \in K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ とし、$F_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}$ とする．F のヘシアンと $F_1, F_2, \cdots, F_n$ のヤコビアンは同じこと.

Lemma 10. 次の条件は同値である.（証明は簡単）

1. F のヘシアンは、恒等的に消える.
2. $F_1, \cdots, F_n$ のヤコビアンは消える.
3. $F_1, \cdots, F_n$ は代数的従属である.

$F_1, F_2, \cdots, F_n$ は、代数的独立ではない、同次数の斉次多項式であるとだけ仮定すれば十分である場合が多い.
$F_1, \cdots, F_n$ が代数的従属であるとして、関係式 g を考える．すなわち、$g(y_1, \cdots, y_n) \in K[y_1, \cdots, y_n]$

$$f(F_1, \cdots, F_n) = 0$$

とし、

$$h'_i = \frac{\partial g}{\partial y_i}(x_1, \cdots, x_n)$$

$$h_i = \frac{1}{\mathrm{GCD}(h'_1, \cdots, h'_n)} h'_i$$

と置く.
　また、

$$\mathbf{h} = (h_1, h_2, \cdots, h_n)$$

$$h_i^{(j)} = \frac{\partial}{\partial x_j} h_i$$

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^{(j)} &= \frac{\partial}{\partial x_j}(h_1, h_2, \cdots, h_n), i = 1, 2, \cdots, n && (13) \\ &= (h_1^{(j)}, h_1^{(j)}, \cdots, h_1^{(j)}), i = 1, 2, \cdots, n && (14) \end{aligned}$$

と置く．　次の微分方程式を考える.

$$h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} f + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} f + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} f = 0$$

この微分方程式の R における解を $\mathrm{Sol}(\mathbf{h}, R)$ とおく.

Lemma 11. *1.* $F \in \mathrm{Sol}(\mathbf{h}, R)$

2. $h_i \in \mathrm{Sol}(\mathbf{h}, R)$

3. $h'_i \in \mathrm{Sol}(\mathbf{h}, R)$

従って、この微分方程式は自己消滅型である． 実は、$F \in \mathrm{Sol}(\mathbf{h}^{(1)}, \mathbf{h}^{(2)}, \cdots, \mathbf{h}^{(n)}; R)$ である．すなわち、

Theorem 12. $\begin{pmatrix} h_1^{(1)} & h_2^{(1)} & \cdots & h_n^{(1)} \\ h_1^{(2)} & h_2^{(2)} & \cdots & h_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \\ h_1^{(n)} & h_2^{(n)} & \cdots & h_n^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$

Lemma 13. $n = 5$ のとき、この微分方程式は係数・変数分離型の SVDE である．

Theorem 14. 変数の数 $n = 5$ とする．$K[u, v]$ の元を要素とする 2×3 行列 (a_{ij}) が存在し、$f = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ x & y & z \end{vmatrix}$ と置くとき、$K[u, v][f]$ の元はゼロへシアンであり、逆にゼロへシアンをもつ斉次多項式はこの形に限る．

Example 15. $f = \begin{vmatrix} -v & u & 0 \\ 0 & -v & u \\ x & y & z \end{vmatrix} = u^2x + uvy + v^2z$

6 $n = 5$ の場合分離形であることはどのようにして示すことができるか？

$(x_1, x_2, \cdots, x_5) \mapsto (h_1, h_2, \cdots, h_5)$ によって定義される $\mathbb{A}^5 \to \mathbb{A}^5$ の像を W とし、その linear closure を L とする．一方：$T = \{(x_1, \cdots, x_n) | h_1 = h_2 = \cdots = h_n = 0\}$ とする．このとき、$L \subset T$ を示すことが鍵となる．このためには、各々の $i = 1, 2, \cdots, n$ について

$$h_i \in \mathrm{Sol}(\mathbf{a}; R), \forall \mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_n) \in L.$$

を示せば良い．

ここに、 $\mathrm{Sol}(\mathbf{a}; R)$ は、

$$a_1\frac{\partial}{\partial x_1} + a_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + a_n\frac{\partial}{\partial x_n}$$

の核のこと.

Example 16. $F = u^2x + uvy + v^2z$ の場合. 写像 $: \mathbb{A}^5 \to \mathbb{A}^5$ は、

$$(x_1, x_2, \cdots, x_5) \mapsto (h_1, h_2, \cdots, h_5) = (0, 0, v^2, 2uv, u^2)$$

によって定義されている. よって、$W = \{(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)|y_1 = y_2 = 0, y_4^2 - 4y_3y_5\}$, $L = \{(0, 0, *, *, *)\}$ である. $\mathbf{a} = (0, 0, 1, 0, 0), \mathbf{b} = (0, 0, 0, 1, 0), \mathbf{c} = (0, 0, 0, 0, 1)$ は L の基底であり、

$$h_i \in \mathrm{Sol}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}; R)$$

となる. このことから、h_i は 最後の 3 変数を含まないことがわかる.

可換環論では、$T = \{(u, v, x, y, z)|u^2 = 0, uv = 0, v^2 = 0\}, L = \{(u, v, x, y, z)|u = 0, v = 0\}$ であり、$L \subset T$ となる.

参考文献

[1] P. Gordan and M. Nöther, *Ueber die algebraischen Formen, deren Hesse'sche Determinante identisch verschwindet,* Math. Ann. **10** (1876), 547-568.

[2] T. Maeno and J. Watanabe, *Lefschetz elements of Artinian Gorenstein algebras and Hessians of Homogeneous polynomials*, Illinois J. Mathematics.

[3] J. Watanabe, *A remark on the Hessian of homogeneous polynomials,* in *The Curves Seminar at Queen's Volume XIII,* Queen's Papers in Pure and Appl. Math., Vol. 119, 2000, 171-178.

[4] H. Yamada, *On a theorem of Hesse —P. Gordan and M. Noether's theory —*, Unpublished.