凸領域上での多重バブル解の非存在について

Massimo Grossi　(ローマ大学 “La Sapienza”)
高橋　太　(大阪市立大学・理)

『臨界型』と呼ばれる変分構造を持つ半線形楕円型方程式の境界値問題に対しては、方程式に含まれるパラメーターが変化するのに応じて、領域上の複数点で L^∞ ノルムの意味で爆発または凝集現象を起こす非コンパクトな解の族が存在することが知られている。以下では、このような特異的な漸近挙動を示す解の族のことを『多重バブル解』の族と呼ぶ。ここでの目的は、方程式の設定された領域が、幾何学的・位相的にもっとも単純と考えられる凸領域の場合に、そのような多重バブル解の族が存在しないことを示すことである。

以下に典型的な結果を挙げる。

定理 1（Liouville 方程式の場合）　$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を滑らかな有界凸領域とし、$\{u_\lambda\}_{\lambda>0}$ を

$$(E_\lambda) \begin{cases} -\Delta u = \lambda e^u & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

の解の族で $\|u_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \to +\infty\ (\lambda \to 0)$ をみたすものとする。このとき、領域内の１点 $a \in \Omega$ が存在して

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda \int_\Omega e^{u_\lambda} dx = 8\pi, \quad \lim_{\lambda\to 0} u_\lambda = 8\pi G(\cdot, a) \quad \text{in } C^2_{loc}(\overline{\Omega} \setminus \{a\})$$

が成り立つ。

定理 2（平均場方程式の場合）　$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を滑らかな有界凸領域とし、$\{u_\lambda\}_{\lambda>0}$ を

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda \frac{V(x)e^u}{\int_\Omega V(x)e^u dx} & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

の解の族で、$\lambda > 0$ が有界の範囲を動くときに $\|u_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)}$ が上に有界でないものとする。ここで $V \in C^2(\overline{\Omega}), \inf_\Omega V > 0$ は与えられた関数とする。さらに $R - \frac{1}{4\pi}\log V$ は Ω で凸関数であると仮定する。このとき $\{\lambda\}$ の集積点は 8π だけである。特に $V > 0$ が Ω で concave なとき、定理の結論が成り立つ。

定理 3（2 次元べき型非線形項方程式の場合）　$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を滑らかな有界凸領域とし、$\{u_p\}$ を

$$(E_p) \begin{cases} -\Delta u = (u_+)^p & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

の解の族で、条件 $p\int_\Omega (u_+)^{p+1}dx = O(1)$ $(p\to\infty)$ をみたすものとする。このとき、領域内の１点 $a\in\Omega$ が存在して

$$\lim_{p\to\infty} p\int_\Omega (u_+)^p dx = 8\pi\sqrt{e}, \quad \lim_{p\to\infty} pu_p = 8\pi\sqrt{e}G(\cdot,a) \quad \text{in } C^2_{loc}(\overline{\Omega}\setminus\{a\})$$

が成り立つ。

定理 4（近臨界 Sobolev 型方程式の場合） $\Omega\subset\mathbb{R}^N, N\geq 4$ を滑らかな有界凸領域とする。このとき

$$(P_\varepsilon)\begin{cases} -\Delta u = u^{\frac{N+2}{N-2}-\varepsilon} & \text{in } \Omega, \\ u>0 & \text{in } \Omega, \\ u=0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

の任意の解の族 $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ に対して、領域内の１点 $a\in\Omega$ が存在して

$$|\nabla u_\varepsilon|^2 dx \rightharpoonup S^{N/2}\delta_a, \quad u_\varepsilon^{\frac{2N}{N-2}} \rightharpoonup S^{N/2}\delta_a$$

が成り立つ。ここに $S=\inf_{u\in H_0^1(\Omega),u\neq 0}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}\|u\|^{-2}_{L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)}$ は Sobolev 不等式の最良定数である。

以上の定理 1,3,4 において、$a\in\Omega$ は Robin 関数 R の一意最小点、また定理 2 においては a は $R-\frac{1}{4\pi}\log V$ の一意最小点である。

既存の多重バブル解の爆発解析において、もし考える方程式に領域の複数点で爆発・凝集現象を起こす多重バブル解が存在するとき、その多重爆発点の位置は、ある種の「バランス条件」をみたさなければならないことが明らかにされている。

以上の非存在定理は、すべて次の主定理の簡単な系である。主定理は、多重バブル解が存在するための必要条件である「バランス条件」が、凸領域上では成り立たないことを示している。

主定理 $l\geq 2$ を整数とし、$\Omega^l=\Omega\times\cdots\times\Omega$（$l$ 重直積）, $\Delta=\{(\xi_1,\cdots,\xi_l)\in\Omega^l|\xi_i=\xi_j \text{ for some } i\neq j\}$ とおく。定数 $A,B>0$ と 正ベクトル $\Lambda=(\Lambda_1,\cdots,\Lambda_l)$,（つまり $\Lambda_i>0,\ \forall i$) に対して、関数 $\mathcal{F}_\Lambda:\Omega^l\setminus\Delta\to\mathbb{R}$ を

$$\mathcal{F}_\Lambda(\xi_1,\cdots,\xi_l)=A\sum_{i=1}^l (R(\xi_i)+K(\xi_i))\Lambda_i^2 - B\sum_{\substack{i\neq j \\ 1\leq i,j\leq l}} G(\xi_i,\xi_j)\Lambda_i\Lambda_j$$

で定義する。ここに $K\in C^2(\Omega)$ は $R+K$ が Ω で凸関数となるものとする。

さらに Ω は凸領域であるとする。このとき

$$\frac{1}{2}A(\nabla R(a_i)+\nabla K(a_i))\Lambda_i^2 - B\sum_{j=1,j\neq i}^l \nabla_x G(a_i,a_j)\Lambda_i\Lambda_j=\vec{0} \quad (i=1,2,\cdots,l)$$

をみたすような $(a_1, \cdots, a_l) \in \Omega^l \setminus \Delta$ （$\Omega^l \setminus \Delta$ における $\mathcal{F}_\Lambda$ の臨界点）は存在しない。

ここで、$G = G(x, y)$ は斉次 Dirichlet 境界条件付き $-\Delta$ の Green 関数

$$-\Delta_x G(x,y) = \delta_y(x),\ x \in \Omega, \quad G(x,y) = 0,\ x \in \partial\Omega$$

をあらわし、

$$R(x) = \lim_{y \to x} [\Gamma(x,y) - G(x,y)]$$

は Green 関数に付随する Robin 関数とする。ただし

$$\Gamma(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log |x-y|^{-1}, & (N=2), \\ \frac{1}{(N-2)\sigma_N} |x-y|^{2-N}, & (N \geq 3) \end{cases}$$

は $-\Delta$ の基本解で、σ_N は $(N-1)$ 次元球面の体積とする。

主定理の証明は、次の補題から容易に得られる。主定理中の関数 K は、それ自身興味深い結果である「凸領域上での Robin 関数の狭義凸性」(2 次元の場合は Caffarelli-Friedman [1], 3 次元以上の場合は Cardaliaguet-Tahraoui [2]) により、定数関数でも良いことに注意する。

補題（Green 関数に対する Pohozaev 型恒等式)

$P \in \mathbb{R}^N$, $a, b \in \Omega, a \neq b$ を任意の点とする。このとき次が成り立つ。

$$\begin{aligned} &\int_{\partial\Omega} (x-P) \cdot \nu(x) \left(\frac{\partial G(x,a)}{\partial \nu_x} \right) \left(\frac{\partial G(x,b)}{\partial \nu_x} \right) ds_x \\ &= (2-N) G(a,b) + (P-a) \cdot \nabla_x G(a,b) + (P-b) \cdot \nabla_x G(b,a), \end{aligned}$$

ここで $\nu(x)$ は $x \in \partial\Omega$ における単位外法線ベクトルである。

この補題自身には領域の凸性は用いないことに注意する。

補題の証明

ここでは形式的な計算を行うが、以下の議論はデルタ関数の近似列と適当な正則化を用いることで正当化される。また、記号の簡単化のために $G_a(x) = G(x,a), G_b(x) = G(x,b)$ とおき、$P \in \mathbb{R}^N$ を任意として

$$w(x) = (x-P) \cdot \nabla G_a(x)$$

と定義する。このとき簡単な計算から、

$$\begin{aligned} -\Delta w(x) &= 2\delta_a(x) + (x-P) \cdot \nabla \delta_a(x), \\ -\Delta G_b(x) &= \delta_b(x) \end{aligned}$$

を得るが、$G_b(x)$, $w(x)$ をそれぞれの式にかけて辺々引き算し、Ω 上積分することで

$$\begin{aligned} &\int_\Omega (\Delta G_b(x))\, w(x) - (\Delta w(x))\, G_b(x) dx \\ &= \int_\Omega \{2\delta_a(x) G_b(x) + (x-P) \cdot \nabla \delta_a(x) G_b(x) - \delta_b(x) w(x)\} dx \end{aligned}$$

となる。ここで部分積分に注意して計算すると

$$
\begin{aligned}
LHS &= \int_{\partial\Omega} (x-P)\cdot\nu(x)\left(\frac{\partial G_a(x)}{\partial\nu}\right)\left(\frac{\partial G_b(x)}{\partial\nu}\right) ds_x \\
RHS &= 2G_b(a) - w(b) + \int_{\Omega} (x-P)\cdot\nabla\delta_a(x) G_b(x) dx \\
&= 2G_b(a) - w(b) + \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} (x_i - P_i)\frac{\partial\delta_a}{\partial x_i} G_b(x) dx \\
&= 2G_b(a) - w(b) - \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i}\{(x_i-P_i)G_b(x)\}\delta_a(x) dx \\
&= 2G_b(a) - w(b) - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\{(x_i-P_i)G_b(x)\}\Big|_{x=a} \\
&= (2-N)G(a,b) + (P-a)\cdot\nabla_x G(a,b) + (P-b)\cdot\nabla_x G(b,a).
\end{aligned}
$$

以上で補題が証明できた。（補題の証明終わり）

主定理の証明

背理法による。

$$
\frac{1}{2}A\left(\nabla R(a_i) + \nabla K(a_i)\right)\Lambda_i^2 - B\sum_{j=1, j\neq i}^{l} \nabla_x G(a_i, a_j)\Lambda_i\Lambda_j = \vec{0} \tag{1}
$$

をみたす $\{a_1, \cdots, a_l\} \subset \Omega$ $(l \geq 2)$ があったとせよ。

$P \in \Omega$ は後で選ぶことにして、$P - a_i$ を (1) に内積して足すと

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}A\sum_{i=1}^{l} (P-a_i)\cdot\left(\nabla R(a_i) + \nabla K(a_i)\right)\Lambda_i^2 \\
&= B\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1, j\neq i}^{l} (P-a_i)\cdot\nabla_x G(a_i,a_j)\Lambda_i\Lambda_j \\
&= B\sum_{1\leq j<k\leq l} \left\{(P-a_j)\cdot\nabla_x G(a_j,a_k) + (P-a_k)\cdot\nabla_x G(a_k,a_j)\right\}\Lambda_j\Lambda_k.
\end{aligned}
$$

ここで補題より

$$
\begin{aligned}
&(P-a_j)\cdot\nabla_x G(a_j,a_k) + (P-a_k)\cdot\nabla_x G(a_k,a_j) \\
&= \int_{\partial\Omega} (x-P)\cdot\nu(x)\left(\frac{\partial G(x,a_j)}{\partial\nu_x}\right)\left(\frac{\partial G(x,a_k)}{\partial\nu_x}\right) ds_x + (N-2)G(a_j,a_k)
\end{aligned}
$$

となるが、右辺は Ω の凸性から正値であることに注意する。実際、Ω の凸性と Hopf の補題より、$(x-P)\cdot\nu(x) > 0, \frac{\partial G(x,a_j)}{\partial\nu_x} < 0,\ (x \in \partial\Omega)$ であり、また、 Green 関数の正値性

$G(a_j, a_k) > 0$ $(j \neq k)$ に注意すればよい。よって

$$\sum_{i=1}^{l}(a_i - P)\cdot(\nabla R(a_i) + \nabla K(a_i)) < 0. \tag{2}$$

一方、仮定 「$R+K$ は凸関数」より $R+K$ のすべての等位集合は唯一の狭義最小点 $P \in \Omega$ に関して星型で

$$(a-P)\cdot(\nabla R(a) + \nabla K(a)) \geq 0, \quad \forall a \in \Omega \setminus \{P\}$$

となる。特に

$$\sum_{i=1}^{l}(a_i - P)\cdot(\nabla R(a_i) + \nabla K(a_i)) \geq 0. \tag{3}$$

(2) と (3) は明らかに矛盾である。

参考文献

[1] L. A. Caffarelli, and A. Friedman: *Convexity of solutions of semilinear elliptic equations,* Duke Math. J. **52**(2) (1985) 431-456.

[2] P. Cardaliaguet, and R. Tahraoui: *On the strict concavity of the harmonic radius in dimension* $N \geq 3$*,* J. Math. Pures Appl. **81**(9) (2002) 223-240.

[3] M. Grossi, and F. Takahashi: *Nonexistence of multi-bubble solutions to some elliptic equations on convex domains,* J. Funct. Anal. **259**(4) (2010) 904-917.