# シューア函数とともに四半世紀

山田裕史（岡山大学）

## 1　はじめに

大層な題目を掲げてしまった．定年退官の際の最終講義みたいである.「お前の数学なんかとっくに終わっている．そもそも始まってすらいないのではないか」という声が聞こえてきそうだが，自分ではまだ現役と思っている．他人にはどのように写るかわからないが，常に新しい話をしようと心がけている．

今回は無限変数多項式環の「混合基底」という話題について１時間お付き合いいただいた．以前の学生で今は防衛大准教授の水川裕司と，現在の学生（正式には博士研究員），青影一哉との共同研究の産物である．

素数 $p$ を固定する．我々の混合基底は，ラフに言ってしまえばシューア函数とブラウアー・シューア函数との積であり，ヤング図形でラベル付けられる代物だ．もともとは $p=2$ の場合にアフィンリー環 $A_1^{(1)}$ の基本表現の実現に関連して自然に出て来たものだ．今回はことさらにこの基底だけを取り上げて，今一つの基底との変換を調べてみようと言うわけである.「２ちゃんねる」ではケチョンケチョンに叩かれたものだが，別の場所では面白いと褒めてもらったこともある．数学を面白いかどうかだけで判断してはいけないのは重々承知している.「私はある種の使命感から数学を研究しているのであって，数学なんて面白くも何ともない」という元同僚がいる，高邁な考えではある．しかし私には使命もないし，期待もされていないので「面白さ」だけが研究の原動力だ.

## 2　対称函数の空間

本稿を通じて $V$ は無限変数多項式環とする．つまり

$$V = \mathbb{Q}[t_j; j \geq 1] = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V(n).$$

ここで $V(n)$ は $n$ 次斉次部分である．ただし $\deg t_j = j$ と勘定している．空間 $V$ は $t_j = \frac{1}{j}(x_1^j + x_2^j + \ldots)$ と思うことにより「もともとの変数 $x_k$ 達」の

対称函数のなす空間と考えられる．従って上の次数勘定は妥当なものだ．典型的な，そして有名な基底として「シューア函数」がとれる．いま $P(n)$ を $n$ の分割（＝ヤング図形）全体の集合としよう．分割 $\lambda \in P(n)$ に対してシューア函数 $S_\lambda(t)$ は

$$S_\lambda(t) := \sum_{\rho \in P(n)} \chi_\rho^\lambda \frac{t_1^{m_1} t_2^{m_2} \cdots}{m_1! m_2! \cdots} \quad \in V(n).$$

により定義される．ここで和は $\rho = (1^{m_1} 2^{m_2} \ldots) \in P(n)$ を走る．また $\chi_\rho^\lambda$ は対称群 $\mathfrak{S}_n$ の $\lambda$ という既約表現の指標の共軛類 $\rho$ 上での値（整数）である．

この函数に魅せられて四半世紀が過ぎた，というわけだ．広島での大学院生時代に佐藤幹夫先生のソリトンに関する講義を聴き，対称群が非線型微分方程式に関わっていることに新鮮な驚きと感動を覚えた．爾来，直接，間接にこの函数に関連した仕事をしてきた．このあたりの事情は「組合せ論プロムナード」（日本評論社）というエロ本に書いたので参照されたい．

シューア函数は $V$ 上の内積

$$\langle F, G \rangle := F(\partial) G(t)|_{t=0}, \qquad \partial = (\frac{\partial}{\partial t_1}, \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t_2}, \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial t_3}, \ldots)$$

に関して直交している．従って $\{S_\lambda(t); \lambda \in P(n)\}$ は $V(n)$ の正規直交基底である．

## 3　混合基底

今後，素数 $p$ を固定する．分割 $\lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} \ldots)$ が「$p$-正則」であるとは任意の $i$ に対して $m_i < p$ を満たすことである．その全体を $P^{(p)}(n)$ で表そう．また分割 $\lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} \ldots)$ が「$p$-類正則」であるとは任意の $i$ に対して $m_{pi} = 0$ を満たすことである．その全体を $P_{(p)}(n)$ で表す．この 2 つの集合が同数の元を持っていることはオイラーの昔から知られている．実際，次のようにして自然な全単射

$$\gamma : P^{(p)}(n) \longrightarrow P_{(p)}(n)$$

が得られる．いま $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$ を $p$-正則としよう．もし $\lambda_i = pk$ ならば $\lambda_i$ を $(k, \ldots, k)$，すなわち $k$ の $p$ 回の繰り返し，で置き換える．この操作を $p$-類正則な分割 $\widetilde{\lambda}$ ができあがるまで繰り返す．たとえば $p=2$，$\lambda = (6,4)$ に対して $\widetilde{\lambda} = (3,3,1,1,1,1) = (1^4 3^2)$ となる．すぐにわかることだが $\ell(\widetilde{\lambda}) - \ell(\lambda)$ は $p-1$ で割り切れる．この全単射 $\gamma$ を「$p$-グレイシャー対応」と呼ぶこともある．

分割 $\lambda = (1^{m_1}2^{m_2}\ldots)$ に対して新たな分割 $\lambda^r$ と $\lambda^q$ を以下のように定義する．これらの分割における $i$ の登場回数（＝重複度）$m_i(\lambda^r)$，$m_i(\lambda^q)$ が次で与えられるというわけだ．

$$m_i(\lambda^r) := k \quad \text{if} \quad m_i \equiv k \pmod{p},$$

$$m_i(\lambda^q) := \frac{m_i - k}{p} \quad \text{if} \quad m_i \equiv k \pmod{p}.$$

たとえば $p = 3$, $\lambda = (5^3 4^4 2^{11} 1^2) \in P(55)$ とすると $\lambda^r = (42^2 1^2) \in P^{(3)}(10)$, また $\lambda^q = (542^3) \in P(15)$ である．これにより全単射

$$\beta : P(n) \longrightarrow \bigcup_{n_0 + pn_1 = n} P^{(p)}(n_0) \times P(n_1)$$

ができあがる．

さて上で対称群のモジュラー表現論の言葉を借りてきた．よく知られていることだが，対称群 $\mathfrak{S}_n$ の標数 $p$ での既約表現は集合 $P^{(p)}(n)$ でラベル付けられる．いま $\varphi^\lambda_\rho$ を $\lambda \in P^{(p)}(n)$ に対応する既約表現のブラウアー指標としよう．$p$-類正則分割（＝ $p$-正則共軛類）$\rho \in P_{(p)}(n)$ 上での値を考えている．これは整数である．たとえば $p = 2$, $n = 5$ のブラウアー指標表をお見せしよう．

$$\Phi^{(2)}_5 = \begin{array}{c|ccc} & (1^5) & (1^2 3) & (5) \\ \hline (5) & 1 & 1 & 1 \\ (41) & 4 & 1 & -1 \\ (32) & 4 & -2 & -1 \end{array}$$

通常指標からシューア函数をこしらえたのと同じレシピで，ブラウアー指標から「ブラウアー・シューア函数」をつくる．

$$B_\lambda(t) = \sum_{\rho \in P^{cr}(n)} \varphi^\lambda_\rho \frac{t_1^{m_1} t_2^{m_2} \cdots}{m_1! m_2! \cdots}.$$

ここで和は $p$-類正則な分割 $\rho = (1^{m_1}2^{m_2}\cdots) \in P_{(p)}(n)$ を走る．ブラウアー・シューア函数とはずいぶん思い切った名前を付けたものだ，と自分でも思う．まだ詳しい性質が明らかになったわけでもなく，いろいろな場面に顔を出すことが知られているわけでもない．文字通り「名前負け」だろう．誰も相手にしない函数だからこそ私が責任を持って（しばらくは）遊んであげる．

いま
$$V^{(p)} = \mathbb{Q}[t_j; j \geq 1, j \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, p)\}$$
と置いて空間 $V^{(p)}(n) = V^{(p)} \cap V(n)$ を考える.「ブラウアー指標の直交性」から $\{B_\lambda(t); \lambda \in P^{(p)}(n))\}$ はここの基底になる．ただし残念ながら内積
$$\langle F, G \rangle = F(\partial)G(t)|_{t=0}.$$
に関して直交しているわけではない．双対基底を得るには「射影被覆」を考えなければならない．半単純でない世界に生きているものの宿命である．

ここで主役の登場だ．分割 $\lambda \in P(n)$ に対して
$$W_\lambda(t) := B_{\lambda^r}(t) S_{\lambda^q}(t_{(p)}),$$
と定義しよう．ここで変数 $t_{(p)}$ は $t_{(p)} = (t_p, t_{2p}, t_{3p}, \ldots)$ のことと了解する．明らかにこれらは線型独立で，空間 $V(n)$ の基底となっている．この基底を「混合基底」と呼ぶ．

# 4　変換行列

空間 $V(n)$ の基底が 2 つある．そこでそれらの間の変換規則を調べていこう．
$$S_\lambda(t) = \sum_{\mu \in P(n)} a_{\lambda\mu} W_\mu(t)$$
により定まる $a_{\lambda\mu}$ を並べて変換行列 $A_n^{(p)} = (a_{\lambda\mu})$ をつくる．例を挙げよう．$(p, n)$ が $(3,3), (3,4), (3,5), (3,6)$ の場合の変換行列を以下にお見せする．

$$A_3^{(3)} = \begin{array}{c|ccc} & 3 & 21 & (\emptyset, 1) \\ \hline (3) & 1 & 0 & 1 \\ (21) & 1 & 1 & -1 \\ (1^3) & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

$$A_4^{(3)} = \begin{array}{c|ccccc} & 4 & 31 & 2^2 & 21^2 & (1, 1) \\ \hline (4) & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ (31) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (2^2) & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ (21^2) & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ (1^4) & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$A_5^{(3)} = \begin{array}{c|ccccccc}
 & 5 & 41 & 32 & 31^2 & 2^21 & (2,1) & (1^2,1) \\
\hline
(5) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
(41) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
(32) & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
(31^2) & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
(2^21) & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
(21^3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
(1^5) & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}$$

$$A_6^{(3)} = \begin{array}{c|ccccccccccc}
 & 6 & 51 & 42 & 3^2 & 41^2 & 321 & 2^21^2 & (3,1) & (21,1) & (\emptyset,2) & (\emptyset,1^2) \\
\hline
(6) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
(51) & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\
(42) & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(3^2) & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\
(41^2) & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
(321) & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
(2^21^2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(2^3) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\
(31^3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
(21^4) & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\
(1^6) & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{array}$$

ここで列は分割のペア $(\mu^r, \mu^q)$ でラベルされている．また単独の $\mu^r$ は $(\mu^r, \emptyset)$ を意味する．混合基底の定義から明らかなことだが $\mu^r$ 達でラベルされている列の部分，すなわち左側のいくつかの列からなる小行列は，対称群の標数 $p$ での「分解行列」$D_n^{(p)}$ である．

これらを見てすぐに気が付くこと．まず成分が整数である．そして見ただけではわからないがいろいろな例で計算してみると，行列式（の絶対値）が $p$ の非負整数冪である．実際

$$|\det A_n^{(p)}| = p^{k_n},$$

ただし $k_n = \sum_{\lambda \in P(n)} \ell(\lambda^q)$ であることが示される．

これに気を良くして単因子も調べてみると，やっぱりうまい式があるのだ．行列 $A_n^{(p)}$ の単因子は

$$\{p^{\frac{\ell(\widetilde{\lambda^r})-\ell(\lambda^r)}{p-1}}; \quad \lambda \in P(n)\}.$$

で与えられる．ちゃんと $p$-グレイシャー対応が顔を出す．またこれより行列式の別の表示も得られる．すなわち

$$k_n = \sum_{\lambda \in P(n)} \frac{\ell(\widetilde{\lambda^r}) - \ell(\lambda^r)}{p-1}$$

である．

最後にある種の直交性について簡単に述べたい．対称群のカルタン行列 $C_n^{(p)} = {}^tD_n^{(p)}D_n^{(p)}$ を真似て $G_n^{(p)} = {}^tA_n^{(p)}A_n^{(p)}$ という行列を考える．カルタンに毛が生えたものなので「ガルタン行列」という呼び名を提唱しているが誰も笑ってくれない．行列 $G_n^{(p)}$ はブロック対角になっている．ブロックは自然数のペア $(n_0, n_1)$ でラベルされている．もう細かな式は書かないが，各ブロックの行列式，単因子も $p$-グレイシャー対応を用いてきちんと記述できる．それなりに美しい結果が得られるのだ．

## 5　室蘭の夜は更けて

学生というのは貴重な存在だ．北大時代の大学院生，森田英章に「室蘭に談話会に来ませんか？」と言われたのは，北大での研究会の折だった．最後に室蘭を訪れたのが忘れもしない 2001 年 9 月 11 日だったからもう 8 年以上も前のことだ．久し振り，ということで喜んでお引き受けした．談話会の前には森田氏と 2 時間ばかり最近考えていることについて議論した．談話会では，8 年前とは違う顔ぶれで，いささか緊張したが，上に述べたようなことをいろいろ脱線しながら話した．歓迎会まで開いていただいたことは感謝に堪えない．焼き鳥屋での「ブタセイ，タレ」という注文も新鮮だった．3 次会は大学の教室で紙コップだ．北大時代の思い出話も含め話は尽きなかった．気がついたら午前 4 時だった．新雪を踏みしめながらゲストハウスに戻った．気温は確かに低かったが，数学教室のメンバーの暖かさに触れて最高に気分の良い滞在だった．どうもありがとう．また来るね．