On smoothing effect for higher order curvature flow equations

浅井　智朗

2009 年 10 月 29 日

東京大学大学院 数理科学研究科 数理科学専攻 博士 1 年

〒 153-8914
東京都目黒区駒場 3-8-1
東京大学大学院 数理科学研究科 数理科学専攻
E-mail:tasai@ms.u-tokyo.ac.jp

1　高階曲率流とその性質

本講演では，表面拡散流方程式

$$\begin{cases} V = -\Delta_{\Gamma(t)} H_{\Gamma(t)}, & t > 0 \\ \Gamma(0) = \Gamma_0 \end{cases}$$

と Willmore 流方程式

$$\begin{cases} V = -\Delta_{\Gamma(t)} H_{\Gamma(t)} - \dfrac{1}{2} H^3_{\Gamma(t)} + 2H_{\Gamma(t)} K_{\Gamma(t)}, & t > 0 \\ \Gamma(0) = \Gamma_0 \end{cases}$$

を代表例とする高階曲率流の初期値問題について考察する．ここで，V は曲面 $\Gamma(t)$ の法速度，$H_{\Gamma(t)}, K_{\Gamma(t)}$ はそれぞれ $\Gamma(t)$ の平均曲率とガウス曲率，$\Delta_{\Gamma(t)}$ は Laplace-Beltrami 作用素と呼ばれる曲面上の Laplacian を表す.

表面拡散流方程式は材料科学の一現象をモデル化した方程式である．表面拡散流方程式にしたがって曲面（曲線）Γ を動かしていくと，体積（囲まれる面積）を一定に保ちながら，表面積（周の長さ）を減らすように動くのである．円または球が定常状態であることが分かっている．

Willmore 流方程式は，はめ込み写像 $f : M \to \mathbf{R}^3$ に対し，汎関数

$$W(f) = \frac{1}{2} \int_{f(M)} H^2 \, dS$$

の勾配流として導出される．汎関数 $W(f)$ の下限の値が曲面の次元と種数によって決定されることが分かっている．Willmore 流方程式は幾何学と関わりが深い方程式である．

2　本研究の目的と主結果

本研究の目的は，表面拡散流と Willmore 流を代表例とする高階曲率流の，曲率が必ずしも連続でない初期曲線に対する局所可解性について考察する．

さて，平面上の曲線の場合に，Γ が $\Gamma(t) = \{(x,y); y = w(x,t)\}$ と関数 w のグラフで表示されているとする．初期曲線 Γ_0 は $\Gamma_0 = \{(x,y); y = w_0(x)\}$ と表わされていることとする．Γ が平面上の曲線の場合を考えよう．すると，Δ_Γ は弧長パラメータ s についての 2 階微分 ∂_s^2 に等しい．また，平面の場合，主方向は一つだけであるから主曲率は一つ．それを κ と書くことにすると．

すると，表面拡散流方程式は

$$\begin{cases} V = -\partial_s^2\kappa, \quad 0 < t \leq T \\ \Gamma(0) = \Gamma_0. \end{cases} \tag{1}$$

Willmore 流方程式は

$$\begin{cases} V = -\partial_s^2\kappa - \dfrac{1}{2}\kappa^3, \\ \Gamma(0) = \Gamma_0. \end{cases} \tag{2}$$

さて，Γ が $\Gamma(t) = \{(x,y); y = w(x,t)\}$ と滑らかな関数 w のグラフで表されているとする．初期曲線 Γ_0 は $\Gamma_0 = \{(x,y); y = w_0(x)\}$ と表わされていることとする．Γ 上の外向き法ベクトル $\mathbf{n}$ を

$$\mathbf{n} = \left(-\frac{w_x}{(1+w_x^2)^{1/2}}, \frac{1}{(1+w_x^2)^{1/2}} \right)$$

ととることにする．すると，[4, Chapter1] より，

$$V = \frac{w_t}{(1+w_x^2)^{1/2}},$$
$$\kappa = \frac{w_{xx}}{(1+w_x^2)^{3/2}}$$

となる．また，$\partial_s = \dfrac{1}{(1+w_x^2)^{1/2}}\partial_x$ である．

このことから，(1) は

$$w_t = -\frac{1}{(1+w_x^2)^2}w_{xxxx} + \frac{10w_xw_{xx}w_{xxx}}{(1+w_x^2)^3} + \frac{3w_{xx}^3}{(1+w_x^2)^3} - \frac{18w_x^2w_{xx}^3}{(1+w_x^2)^4}, \tag{3}$$

(2) は,

$$w_t = -\frac{1}{(1+w_x^2)^2}w_{xxxx} + \frac{10w_xw_{xx}w_{xxx}}{(1+w_x^2)^3} + \frac{3w_{xx}^3}{(1+w_x^2)^3} - \frac{18w_x^2w_{xx}^3}{(1+w_x^2)^4} - \frac{w_{xx}^3}{2(1+w_x^2)^4}, \tag{4}$$

となる．

本研究の主結果を述べよう．

定理 2.1. $w_0 \in h^{1+4\theta}(\mathbf{R}), 0 < \theta < 1/4$ ならば，ある $T > 0$ が存在して $w \in C([0,T], BUC^1(\mathbf{R})) \cap C^1((0,T], BUC^1(\mathbf{R})) \cap C((0,T], BUC^5(\mathbf{R}))$ となる表面拡散流方程式 (3) の解 w が一意存在する．さらに，w は次を満たす．

$$\frac{\partial w}{\partial x} \in C_{1-\theta}((0,T], BUC^4(\mathbf{R})) \cap C_1((0,T], h^{4+4\theta}(\mathbf{R}));$$
$$\frac{\partial w}{\partial x} \in C^{\theta}([0,T], BUC(\mathbf{R})) \cap C([0,T], h^{4\theta}(\mathbf{R})).$$

定理 2.2. $w_0 \in h^{1+4\theta}(\mathbf{R}), 0 < \theta < 1/4$ ならば，ある $T > 0$ が存在して $w \in C([0,T], BUC^1(\mathbf{R})) \cap C^1((0,T], BUC^1(\mathbf{R})) \cap C((0,T], BUC^5(\mathbf{R}))$ となる *Willmore* 流方程式 (4) の解 w が一意存在する．さらに，w は次を満たす．

$$\frac{\partial w}{\partial x} \in C_{1-\theta}((0,T], BUC^4(\mathbf{R})) \cap C_1((0,T], h^{4+4\theta}(\mathbf{R}));$$
$$\frac{\partial w}{\partial x} \in C^{\theta}([0,T], BUC(\mathbf{R})) \cap C([0,T], h^{4\theta}(\mathbf{R})).$$

3 先行結果との比較

表面拡散流と Willmore 流の局所解の一意存在に関する先行結果は [3, 5] がある．[3, 5] では，解析半群の抽象理論を用いて，初期曲面に $h^{2+\beta}$ $(0 < \beta < 1)$ の滑らかさの仮定をおいて，局所解の存在証明を行っている．$h^{2+\beta}$ とは，曲率が Hölder 連続であって，かつ，それが滑らかな関数の近似となっているクラスである．

一方，本研究では，$h^{1+4\theta}$ $(0 < \theta < 1/4)$ のクラスである初期曲線，つまり曲率が不連続であるような特異点が生じている初期曲線に対しても，その特異性が平滑化され，局所解が存在することを示したのである．証明のために用いた理論は [3, 5] と同じく，解析半群論である．

[3, 5] では，まず，reference manifold と呼ばれる超曲面 $\Sigma \subset \mathbf{R}^n$ を固定し，Σ からの距離関数 ρ を用いて，表面拡散流と Willmore 流を

$$\rho_t + F_1(\rho)\rho + F_2(\rho) = 0$$

と ρ に関する準線型方程式とみている．この準線型方程式に対して，H. Amann [1] の抽象準線型方程式に対する一般論を適用することにより局所解を構成している．これに対して，本研究では A. Buttu [2] の初等的な議論を用いている．また，低階の構造をよく反映した評価を構築することにより，初期曲線の曲率が不連続の場合も扱えるようにした．J. Escher, G. Simonett [3, 5] では低階の項に対する評価が粗いため，初期曲面に $h^{2+\beta}$ の滑らかさを必要としている．

一方，本研究では，平面上の曲線 Γ がグラフ表示されている場合に対して，その低階項のノルムの評価を精密化したおかげで，$h^{1+4\theta}$ $(0 < \theta < 1/4)$ という特異点が生じているクラスの初期曲線に対しても，時間局所的に解けることを示したのである．

4　線形方程式

A. Buttu [2] の線形方程式

$$\begin{cases} u'(t) = \Lambda u(t) + f(t), & 0 < t \leq T \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{5}$$

に対する結果を用いて抽象準線形方程式の初期値問題を解く．ただし，X を Banach 空間とし，$\Lambda : D(\Lambda) \subset X \to X$ は X で解析半群を生成する．
また，次で定義される実補間空間の性質をうまく使う．

$$\begin{aligned} D_\Lambda(\theta, \infty) &= \{x \in X; \sup_{r>0} r^{1-\theta} \|\Lambda e^{r\Lambda} x\| < \infty\}, \\ D_\Lambda(\theta) &= \{x \in X; \lim_{r\to 0} r^{1-\theta} \|\Lambda e^{r\Lambda} x\| = 0\}, \\ D_\Lambda(\theta+1) &= \{x \in D(\Lambda); \Lambda x \in D_\Lambda(\theta)\}. \end{aligned}$$

以下，$D_\Lambda(\theta, \infty), D_\Lambda(\theta)$ のノルムを $\|\cdot\|_\theta$, $D_\Lambda(\theta+1)$ のノルムを $\|\cdot\|_{\theta+1}$ で表すこととする．

定義 4.1. E を任意の *Banach* 空間とする．$0 < \theta < 1, 0 < \beta < 2, \beta \neq 1, 0 \leq a < b \leq T$ に対し，*Banach* 空間 $C_1((a,b], D_\Lambda(\beta))$ と $C_{1-\theta}((a,b], E)$ を

$$\begin{aligned} C_1((a,b], D_\Lambda(\beta)) &= \{\varphi \in C((a,b], D_\Lambda(\beta)); \langle\varphi\rangle_\beta = \sup_{a<t\leq b} (t-a)\|\varphi(t)\|_{D_\Lambda(\beta)} < \infty\}, \\ C_{1-\theta}((a,b], E) &= \{\varphi \in C((a,b], E); [\varphi]_\theta = \sup_{a<t\leq b} (t-a)^{1-\theta}\|\varphi(t)\|_E < \infty\} \end{aligned}$$

と定義する．さらに，*Banach* 空間 $W[a,b], Z(a,b), Y(a,b)$ を

$$\begin{aligned} W[a,b] &= C^\theta([a,b], X) \cap C([a,b], D_\Lambda(\theta)), \\ Z(a,b) &= C_{1-\theta}((a,b], X) \cap C_1((a,b], D_\Lambda(\theta)), \\ Y(a,b) &= C_{1-\theta}((a,b], D(\Lambda)) \cap C_1((a,b], D_\Lambda(\theta+1)) \end{aligned}$$

と定義する．以下では簡単のため，記号 W_T, Z_T, Y_T でそれぞれ $W[0,T], Z(0,T), Y(0,T)$ を表すこととする．

補題 4.2. $f \in Z(0,T), u_0 \in D_\Lambda(\theta)$ とする．すると，*mild solution*

$$u(t) = e^{t\Lambda}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)\Lambda} f(s)\, ds$$

は (5) の唯一つの解であり，以下の性質をみたす．

$$u \in W[0,T]$$

$$u \in C^\theta([\varepsilon, T], D(\Lambda)) \ \textit{for all}\ \varepsilon \in (0,T)$$

$$u', \Lambda u \in Z(0,T)$$

さらに,

$$\|\Lambda u\|_{Z(0,T)} \le c_1(\|u_0\|_\theta + \|f\|_{Z(0,T)}),$$

$$\|u\|_{W[0,T]} + \varepsilon [u]_{C^\theta([\varepsilon,T],D(\Lambda))} + \|u\|_{Y(0,T)} \le c_2(\|u_0\|_\theta + \|f\|_{Z(0,T)}).$$

証明. [2, Theorem 2.1] を参照. □

5 抽象準線形方程式論

前節の結果を応用することにより，抽象準線型放物型方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = A(U)U + G(U), \\ U(0) = U_0 \end{cases} \tag{6}$$

に対する局所解の一意存在を証明する．ただし，$A(\cdot) : X \to L(D,X)$ であって，$A(\cdot)$ と低階項 $G(\cdot)$ に対して以下のような仮定をおく．また，$\Lambda = A(U_0) =: A_0$，$\widetilde{U} = e^{tA_0}U_0$ と定め，$V = U - \widetilde{U}$ と定義する．

(A1) $A(U) : D(A(U)) \subset X \to X$ は X において解析半群を生成する．

(A2) 任意の $U \in X$ に対し,

$$D(A(U)) = D(\Lambda), \tag{7}$$

$$D_{A(U)}(\theta+1) = D_\Lambda(\theta+1). \tag{8}$$

(A3) ある定数 $L, L' > 0$ が存在して,

$$\|A(U) - A(V)\|_{L(D(\Lambda),X)} \le L\|U - V\| \qquad (U, V \in X), \tag{9}$$

$$\|A(U) - A(V)\|_{L(D_\Lambda(\theta+1),D_\Lambda(\theta))} \le L'\|U - V\|_\theta \qquad (U, V \in D_\Lambda(\theta)). \tag{10}$$

(G) ある定数 $\hat{c}_i > 0, \tilde{c}_i > 0$,

$$0 \le \gamma_i \le 1, \quad \alpha_i \ge \gamma_i, \quad \begin{cases} \beta_i \ge 1 - \gamma_i, & \text{if } 0 \le \gamma_i < 1, \\ \beta_i > 0, & \text{if } \gamma_i = 1. \end{cases}$$

を満たす定数 α_i, β_i, γ_i が存在して,

$$\|G(V + \widetilde{U})\| \le \sum_{i=1}^m \hat{c}_i \|\widetilde{U}\|^{\alpha_i} \|V\|^{\beta_i} \|\widetilde{U}\|_{D(\Lambda)}^{1-\gamma_i} \|V\|_{D(\Lambda)}^{\gamma_i}, \tag{11}$$

$$\|G(V + \widetilde{U})\|_\theta \le \sum_{i=1}^m \tilde{c}_i \|\widetilde{U}\|_\theta^{\alpha_i} \|V\|_\theta^{\beta_i} \|\widetilde{U}\|_{\theta+1}^{1-\gamma_i} \|V\|_{\theta+1}^{\gamma_i} \tag{12}$$

が成り立つ.

定理 5.1. $U_0 \in D_\Lambda(\theta)$ ならば，ある $T>0$ が存在して，(6) の *mild solution*

$$U(t) = e^{tA_0}U_0 + \int_0^t e^{(t-s)A_0}((A(U)-A_0)U + G(U))\,ds$$

が，ただ一つ存在し，(6) の解となる.

この主定理を証明するためにまず次の補題を証明する.

補題 5.2. $U_0 \in D_\Lambda(\theta)$ に対し，$\widetilde{U} = e^{tA_0}U_0$ とおく．すると，

$$\lim_{T\to 0+} \|\widetilde{U}\|_{Y_T} = 0$$

が成り立つ.

証明. $\lim_{t\to 0+} \|\widetilde{U}\|_{C_{1-\theta}((0,t],D(\Lambda))} = 0$ のみ示す．$U_0 \in D_A(\theta)$ より，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある正の数 $\delta > 0$ が存在して，

$$0 < t < \delta \Longrightarrow t^{1-\theta}\|A_0e^{tA_0}U_0\| < \varepsilon$$

となる．$0<t<\delta$ なる t に対して，

$$\begin{aligned}\|\widetilde{U}\|_{C_{1-\theta}((0,t],D(\Lambda))} &= \sup_{0<t\le\delta} t^{1-\theta}\|e^{tA_0}U_0\|_{D(\Lambda)} \\ &\le \sup_{0<t\le\delta} t^{1-\theta}(\|e^{tA_0}U_0\| + \|A_0e^{tA_0}U_0\|).\end{aligned}$$

ここで，$\delta > 0$ を必要ならさらに小さくとって，

$$t^{1-\theta}\|e^{tA_0}U_0\| \le t^{1-\theta}\|e^{tA_0}\|_{L(X)}\|U_0\| < \varepsilon.$$

また，$0<t<\delta$ より，

$$t^{1-\theta}\|A_0e^{tA_0}U_0\| < \varepsilon.$$

以上から，

$$\lim_{t\to 0+} \|\widetilde{U}\|_{C_{1-\theta}((0,t],D(\Lambda))} = 0.$$

□

定理 *5.1* の証明. 第一近似 $U = e^{tA_0}U_0 + V$ $(A_0 = A(U_0))$ を用いて，V についての方程式に書き直す（$\widetilde{U} = e^{tA_0}U_0$ とおく）.

$$\begin{cases} V'(t) = A_0V + (A(V+\widetilde{U}) - A_0)(V+\widetilde{U}) + G(V+\widetilde{U}), \\ V(0) = 0. \end{cases}$$

まず，$\widetilde{M} = \|\widetilde{U}\|_\theta$ とおく．次に，$M > 0$ を

$$c_2(L + L')(M + M^2)^2 \le \frac{M}{2}, \tag{13}$$

$$c_2 \left(\sum_{i=1}^{m} (\hat{c}_i + \tilde{c}_i) \widetilde{M}^{\alpha_i} M^{2+\beta_i-\gamma_i} \right) \le \frac{M}{2}, \tag{14}$$

を満たすように十分小さくとり，固定する（$2 + \beta_i - \gamma_i > 1\ (i = 1, \ldots, m)$ より，このような十分小さな正の数 M をとることができる）．補題 5.2 より，$\varepsilon < M^2$ をみたす任意の十分小さな正の数 $\varepsilon > 0$ に対し，ある $\delta > 0$ が存在して，$0 < T < \delta$ ならば，

$$\|\widetilde{U}\|_{Y_T} < \varepsilon$$

$$\sup_{0<t\le T} \|\widetilde{U} - U_0\|_\theta < \varepsilon$$

が成り立つ．この $M > 0$ と $T > 0$ に対し，閉部分集合 F_M^T を

$$F_M^T = \{v \in Y_T \cap W_T; v(0) = 0, \|v\|_{Y_T \cap W_T} \le M\}$$

と定義する．ただし，$\|v\|_{Y_T \cap W_T} = \|v\|_{Y_T} + \|v\|_{W_T}$ と定義する．$v \in F_M^T$ に対し，

$$\Gamma v = V = \int_0^t e^{(t-s)A_0} \{(A(v + \widetilde{U}) - A_0)(v + \widetilde{U}) + G(v + \widetilde{U})\}\, ds$$

と定める．要するに $\Gamma v = V$ は次の方程式の解

$$V'(t) = A_0 V + (A(v + \widetilde{U}) - A_0)(v + \widetilde{U}) + G(v + \widetilde{U}).$$

さて，写像 Γ が F_M^T で不動点を持つことを示したい．まず，写像 Γ が F_M^T をそれ自身にうつすことを示す．補題 4.2 より，

$$\begin{aligned} \|\Gamma v\|_{Y_T \cap W_T} &= \|V\|_{Y_T} + \|V\|_{W_T} \\ &\le c_2(\|A(v + \widetilde{U}) - A_0)v\|_{Z_T} + \|A(v + \widetilde{U}) - A_0)\widetilde{U}\|_{Z_T} + \|G(v + \widetilde{U})\|_{Z_T}). \end{aligned} \tag{15}$$

(15) の各項を評価していく．

$$\begin{aligned} &\|(A(v + \widetilde{U}) - A_0)v\|_{Z_T} \\ &= \Big[(A(v + \widetilde{U}) - A_0)v\Big]_\theta + \Big\langle (A(v + \widetilde{U}) - A_0)v \Big\rangle_\theta. \end{aligned} \tag{16}$$

仮定 (9) より，

$$\begin{aligned} &\Big[(A(v + \widetilde{U}) - A_0)v\Big]_\theta \\ &\le \|A(v + \widetilde{U}) - A_0\|_{L(D(\Lambda),X)} \cdot \|v\|_{C_{1-\theta}((0,T],D(\Lambda))} \\ &\le L\|v + \widetilde{U} - U_0\| \cdot \|v\|_{C_{1-\theta}((0,T],D(\Lambda))} \\ &\le L\left(\|v\| + \|\widetilde{U} - U_0\|\right) \cdot \|v\|_{C_{1-\theta}((0,T],D(\Lambda))} \\ &\le L\left(\|v\|_{W_T} + \|\widetilde{U} - U_0\|\right) \cdot \|v\|_{Y_T} \\ &\le L(M + \varepsilon)M. \end{aligned} \tag{17}$$

一方，仮定 (10) より，

$$
\begin{aligned}
&\left\langle (A(v+\widetilde{U})-A_0)v \right\rangle_\theta \\
&\le \|A(v+\widetilde{U})-A_0\|_{L(D_\Lambda(\theta+1),D_\Lambda(\theta))}\cdot\|v\|_{C_1((0,T],D_\Lambda(\theta+1))} \\
&\le L'\|v+\widetilde{U}-U_0\|_\theta\cdot\|v\|_{C_1((0,T],D_\Lambda(\theta+1))} \\
&\le L'\left(\|v\|_\theta+\|\widetilde{U}-U_0\|_\theta\right)\cdot\|v\|_{C_1((0,T],D_\Lambda(\theta+1))} \\
&\le L'\left(\|v\|_{C((0,T],D_A(\theta))}+\|\widetilde{U}-U_0\|_\theta\right)\cdot\|v\|_{C_1((0,T],D_A(\theta+1))} \\
&\le L'\left(\|v\|_{W_T}+\|\widetilde{U}-U_0\|_\theta\right)\cdot\|v\|_{Y_T} \\
&\le L'(M+\varepsilon)M.
\end{aligned} \tag{18}
$$

(16)-(18) より

$$
\|(A(v+\widetilde{U})-A_0)v\|_{Z_T}\le(L+L')(M+\varepsilon)M \tag{19}
$$

を得る．

同様の計算により，

$$
\begin{aligned}
&\|(A(v+\widetilde{U})-A_0)\widetilde{U}\|_{Z_T} \\
&=\left[(A(v+\widetilde{U})-A_0)\widetilde{U}\right]_\theta+\left\langle (A(v+\widetilde{U})-A_0)\widetilde{U}\right\rangle_\theta \\
&\le (L+L')(M+\varepsilon)\varepsilon.
\end{aligned} \tag{20}
$$

次に，$\|G(v+\widetilde{U})\|_{Z_T}$ を評価しよう．仮定 (11) および $v\in F_M^T$ を用いると，

$$
\begin{aligned}
t^{1-\theta}\|G(v+\widetilde{U})\| &\le \sum_{i=1}^m \hat{c}_i\|\widetilde{U}\|^{\alpha_i}\|v\|^{\beta_i}\left(t^{1-\theta}\|\widetilde{U}\|_{D(\Lambda)}\right)^{1-\gamma_i}\left(t^{1-\theta}\|v\|_{D(\Lambda)}\right)^{\gamma_i} \\
&\le \sum_{i=1}^m \hat{c}_i\|\widetilde{U}\|^{\alpha_i}\|v\|_{W_T}^{\beta_i}\|\widetilde{U}\|_{Y_T}^{1-\gamma_i}\|v\|_{Y_T}^{\gamma_i} \\
&\le \sum_{i=1}^m \hat{c}_i\|\widetilde{U}\|^{\alpha_i}M^{\beta_i}\varepsilon^{1-\gamma_i}M^{\gamma_i} \\
&\le \sum_{i=1}^m \hat{c}_i\widetilde{M}^{\alpha_i}M^{\beta_i+\gamma_i}\varepsilon^{1-\gamma_i}.
\end{aligned}
$$

したがって，

$$
\left[G(v+\widetilde{U})\right]_\theta\le\sum_{i=1}^m \hat{c}_i\widetilde{M}^{\alpha_i}M^{\beta_i+\gamma_i}\varepsilon^{1-\gamma_i}. \tag{21}
$$

同様にして，

$$
\begin{aligned}
t\|G(v+\widetilde{U})\|_\theta &\le \sum_{i=1}^m \tilde{c}_i \|\widetilde{U}\|_\theta^{\alpha_i}\|v\|_\theta^{\beta_i}\left(t\|\widetilde{U}\|_{\theta+1}\right)^{1-\gamma_i}(t\|v\|_{\theta+1})^{\gamma_i} \\
&\le \sum_{i=1}^m \tilde{c}_i \|\widetilde{U}\|_\theta^{\alpha_i}\|v\|_{W_T}^{\beta_i}\|\widetilde{U}\|_{Y_T}^{1-\gamma_i}\|v\|_{Y_T}^{\gamma_i} \\
&\le \sum_{i=1}^m \tilde{c}_i \|\widetilde{U}\|_\theta^{\alpha_i} M^{\beta_i}\varepsilon^{1-\gamma_i}M^{\gamma_i} \\
&= \sum_{i=1}^m \tilde{c}_i \widetilde{M}^{\alpha_i} M^{\beta_i+\gamma_i}\varepsilon^{1-\gamma_i}.
\end{aligned}
$$

したがって，

$$
\left\langle G(v+\widetilde{U})\right\rangle_\theta \le \sum_{i=1}^m \tilde{c}_i \widetilde{M}^{\alpha_i} M^{\beta_i+\gamma_i}\varepsilon^{1-\gamma_i}. \tag{22}
$$

(15),(19),(20),(21),(22) と $\varepsilon < M^2$ であることから

$$
\begin{aligned}
\|\Gamma v\|_{Y_T\cap W_T} &\le c_2(L+L')(M+M^2)^2 + c_2\left(\sum_{i=1}^m (\hat{c}_i+\tilde{c}_i)\|\widetilde{U}\|_\theta^{\alpha_i} M^{2+\beta_i-\gamma_i}\right) \\
&\le \frac{M}{2}+\frac{M}{2} = M.
\end{aligned}
$$

これで，写像 Γ が F_M^T をそれ自身にうつすことが示された．同様の評価の計算を行うことにより，Γ が縮小写像であることが示せ，F_M^T で不動点を持つことが証明される． □

6　高階曲率流の微分形

元の方程式の両辺を x について微分し，$w_x = u$, $\partial w_0/\partial x = u_0$ とおくと，表面拡散流は

$$
\begin{cases}
u_t = -\dfrac{1}{(1+u^2)^2}u_{xxxx} + \dfrac{14uu_xu_{xxx}}{(1+u^2)^3} + \dfrac{19u_x^2u_{xx}}{(1+u^2)^3} + \dfrac{10uu_{xx}^2}{(1+u^2)^3} \\
\quad -\dfrac{144u^2u_x^2u_{xx}}{(1+u^2)^4} - \dfrac{54uu_x^4}{(1+u^2)^4} + \dfrac{144u^3u_x^4}{(1+u^2)^5} \\
u(0) = u_0.
\end{cases}
$$

Willmore 流は

$$
\begin{cases}
u_t = -\dfrac{1}{(1+u^2)^2}u_{xxxx} + \dfrac{14uu_xu_{xxx}}{(1+u^2)^3} + \dfrac{19u_x^2u_{xx}}{(1+u^2)^3} + \dfrac{10uu_{xx}^2}{(1+u^2)^3} \\
\quad -\dfrac{144u^2u_x^2u_{xx}}{(1+u^2)^4} - \dfrac{54uu_x^4}{(1+u^2)^4} + \dfrac{144u^3u_x^4}{(1+u^2)^5} - \dfrac{3u_x^2u_{xx}}{2(1+u^2)^4} \\
\quad +\dfrac{4uu_x^4}{(1+u^2)^5} \\
u(0) = u_0,
\end{cases}
$$

となる．この微分形に対する解の一意存在を証明する．

定理 6.1. $u_0 \in h^{4\theta}(\mathbf{R}), 0 < \theta < 1/4$ ならば，ある $T > 0$ が存在して

$u \in C_{1-\theta}((0,T], BUC^4(\mathbf{R})) \cap C_1((0,T], h^{4+4\theta}(\mathbf{R})) \cap C^\theta((0,T], BUC(\mathbf{R})) \cap C((0,T], h^{4\theta}(\mathbf{R}))$

となる表面拡散流と $Willmore$ 流の微分形を満たす解 u が一意存在する．

証明.

$$\mathcal{A}(u) = -\frac{1}{(1+u^2)^2}\partial_x^4, \quad \mathcal{G}(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}) = \sum_{i=1}^{8} \mathcal{G}_i(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}),$$
$$\mathcal{G}_1(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}) = \frac{14uu_xu_{xxx}}{(1+u^2)^3}, \quad \mathcal{G}_2(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}) = \frac{19u_x^2u_{xx}}{(1+u^2)^3},$$
$$\mathcal{G}_3(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}) = \frac{10uu_{xx}^2}{(1+u^2)^3}, \quad \mathcal{G}_4(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}) = -\frac{114u^2u_x^2u_{xx}}{(1+u^2)^4},$$
$$\mathcal{G}_5(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}) = -\frac{54uu_x^4}{(1+u^2)^4}, \quad \mathcal{G}_6(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}) = \frac{144u^3u_x^4}{(1+u^2)^5},$$
$$\mathcal{G}_7(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}) = -\frac{3u_x^2u_{xx}}{2(1+u^2)^4}, \quad \mathcal{G}_8(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}) = \frac{4uu_x^4}{(1+u^2)^5}$$

とおく．

$\tilde{u} = e^{tA_0}u_0, u = \tilde{u} + v$ とする．$X = BUC(\mathbf{R})$ と定め，$u \in X$ に対し，X 上の作用素 $A(u)$ を

$$A : D(A) = D \to X; v \mapsto A(u)v = \mathcal{A}(u)v$$

と定義する．ここで，$D(\Lambda) = BUC^4(\mathbf{R})$ である．作用素 $\mathcal{A}(u)$ は一様楕円性条件を満たしているから，X で解析半群を生成する．また，$0 < \theta < 1/4$ に対し，

$$D_\Lambda(\theta) = h^{4\theta}(\mathbf{R}), \quad D_\Lambda(\theta+1) = h^{4+4\theta}(\mathbf{R})$$

となる．$(\mathcal{A}(\cdot), \mathcal{G}(\cdot))$ が仮定 (7)-(12) を満たしていることを示せばよい．$\mathcal{A}(\cdot)$ が仮定 (7)-(10) を満たしていることを確認するのは容易．よって，$\mathcal{G}(\cdot)$ が仮定 (11),(12) を満たしていることを示す.

$\|\mathcal{G}_1(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx})\|$ の評価のみ行う．そのために，以下の補間不等式を用いる．

$$\|f^{(k)}\|_{BUC(\mathbf{R})} \le C\|f\|^{1-k/4}\|f\|^{k/4}_{BUC^4\mathbf{R})}, \ (k = 1, 2, 3).$$

$\mathcal{G}_1(v+\tilde{u})$ について

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{G}_1(v+\tilde{u})\| &\leq \left\| \frac{14(v+\tilde{u})(v_x+\tilde{u}_x)(v_{xxx}+\tilde{u}_{xxx})}{(1+(v+\tilde{u})^2)^3} \right\| \\
&\leq 14\|(v+\tilde{u})(v_x+\tilde{u}_x)(v_{xxx}+\tilde{u}_{xxx})\| \\
&\leq 14(\|v\|+\|\tilde{u}\|)(\|v_x\|+\|\tilde{u}_x\|)(\|v_{xxx}\|+\|\tilde{u}_{xxx}\|) \\
&= 14(\|v\|\|v_x\|\|v_{xxx}\| + \|v\|\|v_x\|\|\tilde{u}_{xxx}\| + \|v\|\|\tilde{u}_x\|\|v_{xxx}\| \\
&\qquad + \|v\|\|\tilde{u}_x\|\|\tilde{u}_{xxx}\| + \|\tilde{u}\|\|v_x\|\|v_{xxx}\| + \|\tilde{u}\|\|v_x\|\|\tilde{u}_{xxx}\| \\
&\qquad + \|\tilde{u}\|\|\tilde{u}_x\|\|v_{xxx}\| + \|\tilde{u}\|\|\tilde{u}_x\|\|\tilde{u}_{xxx}\|) \\
&\leq C_1 \Big(\|v\|^2\|v\|_{D(\Lambda)} + \|\tilde{u}\|^{1/4}\|v\|^{7/4}\|\tilde{u}\|_{D(\Lambda)}^{3/4}\|v\|_{D(\Lambda)}^{1/4} \\
&\qquad + \|\tilde{u}\|^{3/4}\|v\|^{5/4}\|\tilde{u}\|_{D(\Lambda)}^{1/4}\|v\|_{D(\Lambda)}^{3/4} + \|\tilde{u}\|\|v\|\|\tilde{u}\|_{D(\Lambda)} \\
&\qquad + \|\tilde{u}\|\|v\|\|v\|_{D(\Lambda)} + \|\tilde{u}\|^{5/4}\|v\|\|\tilde{u}\|_{D(\Lambda)}^{3/4}\|v\|_{D(\Lambda)}^{1/4} \\
&\qquad + \|\tilde{u}\|^{7/4}\|v\|^{1/4}\|\tilde{u}\|_{D(\Lambda)}^{1/4}\|v\|_{D(\Lambda)}^{3/4} + \|\tilde{u}\|^2\|\tilde{u}\|_{D(\Lambda)} \Big).
\end{aligned}
$$

□

この微分形に対して得られた解を積分することにより，元の表面拡散流と Willmore 流の時間局所解を求める.

参考文献

[1] H. Amann, Nonhomogeneous linear and quasilinear elliptic and parabolic boundary value problems, Function spaces, differential operators and nonlinear analysis. Teubner-Texte Math. Teubner, Stuttgart., **133** (1993), 9-126.

[2] A. Buttu, On the Evolution Operator for a Class of Non-autonomous Abstract Parabolic Equations. J. Math. Anal. Appl., **170** (1992), 115-137.

[3] J. Escher, U. F .Mayer, G. Simonett, The surface diffusion flow for immersed hypersurfaces. SIAM J. Math. Anal., **29** (1998), 1419-1433.

[4] Y. Giga, Surface Evolution Equations,A level set approach. Birkäuser, Basel, (2006)

[5] G. Simonett, The Willmore flow near spheres, Differential Integral Equations, **14** (2001), 1005-1014.