一般化されたBURGERS方程式の解の挙動について

加藤 正和
(室蘭工業大学 工学研究科)

1. 概要

本稿では, 以下の一般化されたBurgers方程式の大域解の長時間挙動について考えます:

$$u_t + (f(u))_x = u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x). \tag{1.2}$$

ここで, $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$ とし, $b \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$ に対して, $f(u) = \frac{b}{2}u^2 + \frac{c}{3}u^3$ とします. 添え字の t と x は, t と x に関する偏微分を表します. この一般化されたBurgers方程式は, 気体の流れを記述しており, 未知関数 $u(x,t)$ は, 気体の速度を表しています. 実際, 気体の運動方程式で密度・圧力が定数で外力がない場合を考えると $c = 0$ とした (1.1), (1.2) が導かれます. (1.1) と (1.2) の解は, 次で定義される非線形散逸波 $\chi(x,t)$ に漸近する事が知られています.

$$\chi(x,t) \equiv \frac{1}{\sqrt{1+t}}\chi_*\left(\frac{x}{\sqrt{1+t}}\right), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

ここで,

$$\chi_*(x) \equiv \frac{1}{b}\frac{(e^{b\delta/2}-1)e^{-\frac{x^2}{4}}}{\sqrt{\pi} + (e^{b\delta/2}-1)\int_{x/2}^{\infty} e^{-y^2}dy}, \tag{1.4}$$

$$\delta \equiv \int_{\mathbb{R}} u_0(x)dx. \tag{1.5}$$

この非線形散逸波 $\chi(x,t)$ は, Hopf -Cole 変換により

$$\int_{\mathbb{R}} \chi(x,0)dx = \delta \tag{1.6}$$

を満たす以下のBurgers方程式の解である事が分かります (Hopf [4] と Cole [1] を参照).

$$\chi_t + \left(\frac{b}{2}\chi^2\right)_x = \chi_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1.7}$$

一般化されたBurgers方程式 (1.1), (1.2) の解が非線形波に漸近する速度が, Kawashima [8] と Nishida [11] によって調べられています. 具体的には, ある $\beta \in (0,1)$ に対して $u_0 \in L^1_\beta(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})$ とし, $\|u_0\|_{H^1} + \|u_0\|_{L^1}$ が十分小さいと仮定すると, 次の結果が成り立つ事が分かっています.

$$\|u(\cdot,t) - \chi(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq C(1+t)^{-1+\alpha}(\|u_0\|_{H^1} + \|u_0\|_{L^1_\beta}), \quad t \geq 0. \tag{1.8}$$

ここで, $\alpha = (1-\beta)/2$. 整数 $0 \le l \le k$ に対して, $H^k(\mathbb{R})$ を $\partial_x^l u$ が $L^2(\mathbb{R})$ 空間の元である関数全体の集合とし, そのノルムを $\|\cdot\|_{H^k}$ と書く事にします. また, $L^1_\beta(\mathbb{R})$ を $\|u\|_{L^1_\beta} \equiv \int_{\mathbb{R}} |u|(1+|x|)^\beta dx < \infty$ みたす $L^1(\mathbb{R})$ の部分空間とします.

更に, Matsumura と Nishihara [10] は, $w_0(x) = \exp(-\frac{b}{2}\int_{-\infty}^x u_0(y)dy) - \exp(-\frac{b}{2}\int_{-\infty}^x \chi(y,0)dy)$ と置き, $w_0 \in H^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ とし, $\|w_0\|_{H^2} + \|w_0\|_{L^1} + \|u_0\|_{L^1}$ が十分小さいと仮定すると. (1.8) の代わりに, 以下の評価が成り立つ事を示しました.

$$\|u(\cdot,t) - \chi(\cdot,t)\|_{L^\infty} \le C(1+t)^{-1}\log(2+t)(\|w_0\|_{H^2} + \|w_0\|_{L^1} + |\delta|^{\frac{3}{2}}), \quad t \ge 0. \tag{1.9}$$

ここで, 自然に湧いてくる疑問は, $\beta = 1$ の時に, (1.8) が成立するかというものです. つまり, (1.9) において, 右辺の log 項を取り除いた評価が得られるかどうかというものです. 本稿の目的は, $\delta c = 0$ の場合を除いて, (1.9) が最適な評価である事を示す事です. 実際, 解の第 2 漸近 $V(x,t)$ が以下で与えられます.

$$\begin{aligned} V(x,t) &\equiv -\frac{cd}{12\sqrt{\pi}} V_*\left(\frac{x}{\sqrt{1+t}}\right)(1+t)^{-1}\log(2+t), \quad t \ge 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ &= \partial_x(\eta(x,t)G(x,1+t))(-\frac{cd}{3})\log(2+t). \end{aligned} \tag{1.10}$$

ここで,

$$V_*(x) \equiv (b\chi_*(x) - x)e^{-\frac{x^2}{4}}\eta_*(x), \quad \eta_*(x) \equiv \exp\left(\frac{b}{2}\int_{-\infty}^x \chi_*(y)dy\right),$$

$$d \equiv \int_{\mathbb{R}} \frac{\chi_*^3(y)}{\eta(y)} dy, \tag{1.11}$$

$$G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, \tag{1.12}$$

$$\eta(x,t) = \eta_*(\frac{x}{\sqrt{1+t}}) \tag{1.13}$$

と定義します. k を正の定数, β を実数とし, $E_{k,\beta} \equiv \|u_0\|_{H^k} + \|u_0\|_{L^1_\beta}$ と置きます. 次の定理が導かれます.

Theorem 1.1. $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})$ とし, $E_{1,0}$ が十分小さいと仮定する. その時, 初期値問題 (1.1) と (1.2) は唯一の大域解 $u(x,t)$ を持ち, $u \in C^0([0,\infty); H^1)$ と $\partial_x u \in L^2(0,\infty; H^1)$ を満たす. 更に, $u_0 \in L^1_1(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})$ とし, $E_{1,1}$ が十分小さいと仮定する. その時, 解は以下の評価を満たす.

$$\|u(\cdot,t) - \chi(\cdot,t) - V(\cdot,t)\|_{L^\infty} \le CE_{1,1}(1+t)^{-1}, \quad t \ge 1. \tag{1.14}$$

ここで, $\chi(x,t)$ は (1.3) により, $V(x,t)$ は (1.10) によって定義された関数です.

Remark 1.2. Liu [9] の 42 ページで, Burgers 方程式 (1.1) と (1.2) の初期値問題が c=0 の場合について研究されています. $c \ne 0$ の場合も同様に, $(1+|x|)^2|u_0(x)| \le \tilde{\delta}$ とし, $\tilde{\delta}$ が十分に小さいと仮定すると次の評価が成り立つと証明なしで述べられています.

$$\|u(\cdot,t) - \chi(\cdot,t)\|_{L^\infty} \le C\tilde{\delta}(1+t)^{-1}, \quad t \ge 1.$$

しかしながら, 前述の結果 Theorem 1.1 からこの評価は, $c \neq 0$ の場合は正しくない事が分かります.

Remark 1.3. (1.14) に似た評価は, 他のタイプの Burgers 方程式である KdV-Burgers 方程式 ([3], [5]) や Benjamin-Bona-Mahony-Burgers 方程式 ([2]) に関しても得られています.

2. 準備

後で述べる基本的な評価 Lemma 3.2, Lemma 3.3, Lemma 3.5 は, 次の二つの lemma から導かれます. 最初の lemma は, 熱方程式の解作用素 $e^{t\Delta}$ に対する減衰評価を表しています (証明は Kawashima [7] を参照).

Lemma 2.1. *k を正の整数とし, $q_0 \in H^k(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ と仮定する. その時, 任意の整数 $0 \leq l \leq k$ に対して, 次の評価が成立する.*

$$\|\partial_x^l e^{t\Delta} q_0\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-(\frac{1}{4}+\frac{l}{2})}\|q_0\|_{L^1} + Ce^{-t}\|\partial_x^l q_0\|_{L^2}, \quad t \geq 0. \tag{2.1}$$

非線形散逸波 $\chi(x,t)$ は, (1.3) によって具体的に表されているので, 簡単に次の事が分かります.

$$|\chi(x,t)| \leq C|\delta|(1+t)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4(1+t)}}, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

更に, $G(x,t)$ と $\chi(x,t)$ の微分の減衰評価も次の様に導かれます (証明は [10] を参照).

Lemma 2.2. *α と β を非負の整数とします. その時, 任意の $p \in [1,\infty]$ に対して, 次の評価が成り立ちます.*

$$\|\partial_x^\alpha \partial_t^\beta \chi(\cdot,t)\|_{L^p} \leq C|\delta|(1+t)^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{\alpha}{2}-\beta}, \quad t \geq 0, \tag{2.3}$$

$$\|\partial_x^\alpha \partial_t^\beta G(\cdot,t)\|_{L^p} \leq Ct^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{\alpha}{2}-\beta}, \quad t > 0. \tag{2.4}$$

3. 基本的な評価

$w(x,t) = u(x,t) - \chi(x,t)$ とおくと, $w(x,t)$ は以下の摂動方程式を満たします.

$$w_t = w_{xx} - (b\chi w)_x - (\frac{b}{2}w^2 + \frac{c}{3}u^3)_x, \quad t > 0. \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

$$w(x,0) = u_0(x) - \chi(x,0). \tag{3.2}$$

本稿では, 小さなデーターに対する解の挙動を考えているので, 摂動方程式 (3.1) と (3.2) に対応する以下の線形化方程式を解析することが重要となります.

$$z_t = z_{xx} - (b\chi z)_x, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.3}$$

$$z(x,0) = z_0(x). \tag{3.4}$$

次の線形化方程式の具体的な表現 (3.5), (3.6) が, Theorem 1.1 の証明に主要な役割を果たします (証明は [6] を参照).

Lemma 3.1.

$$U[w](x,t,\tau) = \int_{\mathbb{R}} \partial_x(G(x-y,t-\tau)\eta(x,t))\frac{1}{\eta(y,\tau)}\left\{\int_{-\infty}^{y} w(\xi)d\xi\right\}dy, \tag{3.5}$$
$$0 \le \tau < t, \quad x \in \mathbb{R},$$

と定義すると, (3.3) と (3.4) の解は, 以下で与えられる.

$$z(x,t) = U[z_0](x,t,0), \quad t>0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.6}$$

次の二つの lemma は, 線形化方程式 (3.3), (3.4) に対する減衰評価を与えています. [8] の解作用素 $e^{t\Delta}$ の減衰評価を応用する事で Lemma 3.2 は導く事が出来ます (証明は [6] を参照).

Lemma 3.2. $\beta \in [0,1]$, k を正の整数とし, $p \in [1,\infty]$ とする. $z_0 \in L^1_\beta(\mathbb{R})$ とし, $\int_{\mathbb{R}} z_0(x)dx = 0$ を仮定する. その時, 任意の整数 $0 \le l \le k$ に対して, 次の評価が成立する.

$$\|\partial_x^l U[z_0](\cdot,t,0)\|_{L^p} \le Ct^{-(1-\frac{1}{p}+\beta+l)/2}\|z_0\|_{L^1_\beta}, \quad t>0. \tag{3.7}$$

Lemma 3.3. k を正の整数とする. $z_0 \in H^k(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ とし, $\int_{\mathbb{R}} z_0(x)dx = 0$ を仮定する. その時, 任意の整数 $0 \le l \le k$ に対して, 次の評価が成立する.

$$\|\partial_x^l U[z_0](\cdot,t,0)\|_{L^2} \le C(1+t)^{-(\frac{1}{4}+\frac{l}{2})}\|z_0\|_{L^1} + Ce^{-t}\|z_0\|_{H^l}, \quad t>0. \tag{3.8}$$

Lemma 3.2 と Lemma 3.3 から次の一様評価が導かれます.

Corollary 3.4. k を正の整数とする. $z_0 \in L^1_1(\mathbb{R}) \cap H^k(\mathbb{R})$ とし, $\int_{\mathbb{R}} z_0(x)dx = 0$ を仮定する. その時, 任意の整数 $0 \le l \le k$ に対して, 次の評価が成立する.

$$\|\partial_x^l U[z_0](\cdot,t,0)\|_{L^2} \le CE_{l,1}(1+t)^{-(\frac{3}{4}+\frac{l}{2})}, \quad t>0.$$

線形化方程式 (3.3), (3.4) に対応する非斉次方程式の解の減衰評価も以下の様に導かれます (証明は [6] を参照).

Lemma 3.5. k を正の整数とする. $w \in C^0(0,\infty;H^k) \cap C^0(0,\infty;H^k_1)$ を仮定する. その時, 任意の整数 $0 \le l \le k$ に対して, 次の評価が成り立つ.

$$\begin{aligned}
&\left\|\partial_x^l \int_0^t U[\partial_x w(\tau)](\cdot,t,\tau)d\tau\right\|_{L^2} \\
\le\ & C\int_0^{t/2}(1+t-\tau)^{-(\frac{3}{4}+\frac{l}{2})}\|w(\cdot,\tau)\|_{L^1}d\tau \\
&+C\sum_{m=0}^{l}\int_{t/2}^{t}(1+t-\tau)^{-\frac{3}{4}}(1+\tau)^{-\frac{l-m}{2}}\|\partial_x^m w(\cdot,\tau)\|_{L^1}d\tau \\
&+C\sum_{m=0}^{l}\left(\int_0^t e^{-(t-\tau)}(1+\tau)^{-(l-m)}\|\partial_x^m w(\cdot,\tau)\|_{L^2}^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

ここで, $H^k_1(\mathbb{R}) \equiv \{f : L^1_{loc}(\mathbb{R}) | \quad \|f\|_{H^k_1} \equiv \sum_{m=0}^{k}\|\partial_x^m f\|_{L^1} < \infty\}$.

4. Theorem 1.1 の証明の概略

以下の近似方程式を用意します.

$$v_t = v_{xx} - (b\chi v)_x - (\frac{c}{3}\chi^3)_x, \quad t>0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4.1}$$

$$v(x,0) = 0. \tag{4.2}$$

上の方程式の解 $v(x,t)$ に対する減衰評価が以下で導かれます (証明は [6] を参照).

Lemma 4.1. $l \geq 0$ を整数とする. その時, 次の評価が成立する.

$$\|\partial_x^l v(\cdot,t)\|_{L^2} \leq C|\delta|^3 (1+t)^{-(\frac{3}{4}+\frac{l}{2})} \log(2+t), \quad t \geq 0. \tag{4.3}$$

Theorem 1.1 を証明する為には, 以下の Proposition 4.2 と Proposition 4.3 を示せば十分である事が分かります (証明は [6] を参照).

Proposition 4.2. $k \geq 1$ を整数とする. $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap H^k(\mathbb{R})$ とし, $E_{k,0}$ が十分小さいと仮定する. その時, 初期値問題 (1.1) と (1.2) は, 唯一の大域解 $u(x,t)$ を持つ. $u(x,t)$ は, $u \in C^0([0,\infty); H^k)$ と $\partial_x u \in L^2(0,\infty; H^k)$ を満たす. 更に, $u_0 \in L^1_1(\mathbb{R}) \cap H^k(\mathbb{R})$ とし, $E_{k,1}$ が十分に小さいと仮定する. その時, 任意の整数 $0 \leq l \leq k$ に対して, 次の評価が成り立つ.

$$\|\partial_x^l \left(u(\cdot,t) - \chi(\cdot,t) - v(\cdot,t)\right)\|_{L^2} \leq CE_{k,1}(1+t)^{-(\frac{3}{4}+\frac{l}{2})}, \quad t \geq 0.$$

特に, ソボレフの埋め込み定理より次が成り立ちます.

$$\|u(\cdot,t) - \chi(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq CE_{1,1}(1+t)^{-1}, \quad t \geq 0.$$

ここで, $\chi(x,t)$ は, (1.3) で定義された関数で, $v(x,t)$ は, (4.1) と (4.2) の解です.

Proposition 4.2 と Lemma 4.1 から, $u(x,t) - \chi(x,t)$ $(t \to \infty)$ の漸近展開の主要項がコーシー問題 (4.1) と (4.2) の解 $v(x,t)$ によって決定される事が分かります.

Proposition 4.3. $|\delta| \leq 1$ と仮定する. その時, 次の評価が成り立つ.

$$\|v(\cdot,t) - V(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq C|\delta|^3(1+t)^{-1}, \quad t \geq 1 \tag{4.4}$$

ここで, $v(x,t)$ は (4.1) と (4.2) の解であり, $V(x,t)$ は, (1.10) によって定義された関数です.

最後に, 大まかな議論によって, どのように漸近形 $V(x,t)$ が導出されるかをみる. 最初に, 以下の熱方程式を考えます.

$$u_t = u_{xx} \quad t>0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4.5}$$

$$u(x,0) = u_0(x). \tag{4.6}$$

ここで, $u_0(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} u_0(x)dx \equiv \delta$. (4.5) と (4.6) の解が, 熱核の定数倍 $\delta G(x,t)$ に漸近する事は良く知られています. 次に, (4.1) と (4.2) の線形化方程式 (3.3) と (3.4) を

考えます.

$$z_t = z_{xx} - (b\chi z)_x, \quad t > \tau, \quad x \in \mathbb{R},$$
$$z(x,\tau) = z_0(x).$$

$r(x,t)$ を以下のように定義します.

$$r(x,t) = \int_{-\infty}^{x} z(y,t)dy. \tag{4.7}$$

その時, (3.3) と (3.4) から $r(x,t)$ は次を満たす事が分かります.

$$r_t = r_{xx} - b\chi r_x, \quad t > \tau, \quad x \in \mathbb{R},$$
$$r(x,\tau) = \int_{-\infty}^{x} z_0(y)dy.$$

よって, 次が導かれます.

$$\left(\frac{r(x,t)}{\eta(x,t)}\right)_t = \left(\frac{r(x,t)}{\eta(x,t)}\right)_{xx}. \tag{4.8}$$

ここで, $\eta(x,t)$ は (1.12) によって定義された関数です. $\frac{r(x,t)}{\eta(x,t)}$ が熱方程式を満たすので, 次が導かれます.

$$\frac{r(x,t)}{\eta(x,t)} \sim M_1 G(x, t-\tau), \tag{4.9}$$

ここで, $M_1 = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\eta(x,\tau)} \left\{\int_{-\infty}^{x} z(y,\tau)dy\right\} dx$. 従って, (4.7), (3.5) と (4.9) から, 次が導かれます.

$$z(x,t) = U[z_0](x,t,\tau) \sim M_1(\eta(x,t)G(x,t-\tau))_x. \tag{4.10}$$

デュアメルの原理によって, (4.1) と (4.2) の解 $v(x,t)$ は次の様に書けます.

$$v(x,t) = \int_0^t U[\partial_x(-\frac{c}{3}\chi^3(\tau))](x,t,\tau)d\tau. \tag{4.11}$$

また, (1.12), (1.3) と (1.11) から次が導かれます. $\int_{\mathbb{R}} \frac{\chi^3(\xi,\tau)}{\eta(\xi,\tau)} d\xi = d(1+\tau)^{-1}$. 従って, (4.10) と (4.11) から

$$\begin{aligned}
v(x,t) &\sim \int_0^{t/2} \partial_x(\eta(x,t)G(x,t-\tau)) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\eta(y,\tau)} \int_{-\infty}^{y} \partial_\xi(-\frac{c}{3}\chi^3(\xi,\tau))d\xi dy d\tau \\
&\sim \int_0^{t/2} \partial_x(\eta(x,t)G(x,t-\tau)) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\eta(y,\tau)}(-\frac{c}{3}\chi^3(y,\tau))dy d\tau \\
&\sim \partial_x(\eta(x,t)G(x,t)) \int_0^{t/2} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\eta(y,\tau)}(-\frac{c}{3}\chi^3(y,\tau))dy d\tau \\
&\sim \partial_x(\eta(x,t)G(x,t+1))(-\frac{cd}{3})\log(2+\tau) = V(x,t).
\end{aligned}$$

以上より, 第二漸近形 $V(x,t)$ を導く事ができます.

References

[1] J.D. Cole: *On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics*, Quart. Appl. Math. **IX** (1951), 225–236

[2] N. Hayashi, E.I. Kaikina and P.I. Naumkin: *Large time asymptotics for the BBM-Burgers equation*, to appear in Ann. H. Inst. Poincaré.

[3] N. Hayashi and P.I. Naumkin: *Asymptotics for the Korteweg-de Vries-Burgers Equation*, to appear in Acta Math. Sin. Engl. Ser.

[4] E. Hopf: *The partial differential equation* $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$, Comm. Pure Appl. Math. **3** (1950), 201–230

[5] E.I. Kaikina and H.F. Ruiz-Paredes: *Second term of asymptotics for KdVB equation with large initial data*, Osaka J. Math. **42** (2005), 407–420.

[6] M. Kato: *Large time behavior of solutions to the generalized Burgers equations*, Osaka University Research Reports in Mathematics **06-05** (2006).

[7] S. Kawashima: *The asymptotic equivalence of the Broadwell model equation and its Navier-Stokes model equations*, Japan J. Math. (N.S.) **7** (1981), 1–43.

[8] S. Kawashima: *Large-time behaviour of solutions to hyperbolic-parabolic systems of conservation laws and applications*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **106** (1987), 164–194.

[9] T.-P. Liu: *Hyperbolic and Viscous Conservation Laws*, in: CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, **Vol. 72**, SIAM, Philadelphia, PA, 2000.

[10] A. Matsumura and K. Nishihara: *Global Solutions of Nonlinear Differential Equations –Mathematical Analysis for compressible viscous fluids–*, (in Japanese) Nippon–Hyoron-sha, Tokyo, 2004.

[11] T. Nishida: *Equations of motion of compressible viscous fluids*, in: Pattern and Waves (Ed. T. Nishida, M. Mimura, H. Fujii), Amsterdam, Tokyo: Kinokuniya/ North-Holland, 1986, 97–128

〒 050-8585 北海道室蘭市水元町 27-1 室蘭工業大学 工学研究科

E-mail address: mkato@mmm.muroran-it.ac.jp