グラフのゼータ関数
ー Ihara ゼータ関数と Bartholdi ゼータ関数ー

佐藤巌　**小山高専**

2009 年 5 月 26 日

1　歴史的背景

グラフのゼータ関数は、1966 年に、Ihara [9] による、$PGL(2,F)$ (F : p-進体) の離散群に関連する p-進 Selberg ゼータ関数 (Ihara ゼータ関数) から始まった。1980 年に、 Serre [12] により、Ihara ゼータ関数は正則グラフのゼータ関数であることが指摘された。1986 年、Sunada [14,15] により、Ihara zeta function のグラフによる定義が確立され、Ihara の定理のグラフ理論的証明が与えられた。Hashimoto [6] は、1989 年に、半正則２部グラフの Ihara ゼータ関数の行列式表示を与えた。

一般のグラフに対しては、先ず、1990 年に、Hashimoto [7] により、edge matrix を用いた Ihara ゼータ関数の行列式表示が与えられ、1992 年、Bass [3] により、一般のグラフの Ihara ゼータ関数の隣接行列を用いる行列式表示が得られた。Bass の定理のいろいろな別証明が、 Stark and Terras [13], Kotani and Sunada [10], Foata and Zeilberger [5], Northshield [11], Hoffman [8] 等によって与えられた。

群の growth の研究に絡み、1999 年に、Bartholdi により、２変数のグラフのゼータ関数である、Bartholdi ゼータ関数が定義された。

2　Ihara ゼータ関数

2.1　Ihara ゼータ関数の定義

$\underline{グラフ}G=(V,E)$ を、

$$\begin{cases} V=V(G) & : \underline{点} \text{ の集合 (有限 or 無限)}, \\ E=E(G) & : V \text{ の 2 点 } u,v \text{ を結ぶ } \underline{辺}uv=\{u,v\} \text{ の族 (ある辺を重複して含むことを許す)}. \end{cases}$$

と定義する。

例 1 $G=(V,E), V=\{a,b,c,d\}, E=\{\{a\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,c\}\}$

G の各辺 uv を、$(u,v),(v,u)\in V\times V$ で置き換えた、symmetric digraph $D_G=(V,D(G))$ も、グラフ G と考える。(u,v) を arc という。ここで、$D(G)=\{(u,v),(v,u)\mid uv\in E(G)\}$ とする。$e=(u,v)\in D(G)$ について、u,v をそれぞれ、e の 始点, 終点 といい、$u=o(e),v=t(e)$ とかく。また、$e^{-1}=(v,u)$ を、$e=(u,v)$ の inverse という。　$G(D_G)$ の path $P=(e_1,\cdots,e_n)$ は、$e_i\in D(G),t(e_i)=o(e_{i+1})(1\le i\le n-1)$ なる、$e_1,\cdots,e_n$ の列である。n を P の 長さ といい、$\mid P\mid=n$ とかく。$o(P)=o(e_1),t(P)=t(e_n)$ とおき、上の P を $(o(P),t(P))$-path という。path $P=(e_1,\cdots,e_n)$ の backtracking とは、$e_{i+1}^{-1}=e_i$ なる部分をいう。$o(e_1)=t(e_n)$ のとき、path $P=(e_1,\cdots,e_n)$ は、cycle という。

２つの cycle $C_1=(e_1,\cdots,e_n)$ と $C_2=(e'_1,\cdots,e'_n)$ が 同値 とは、ある自然数 k について、$e'_i=e_{i+k}$ となることである。$[C]$ で、C を含む同値類を表す。cycle B の r 乗B^r は、B と同じ向きに、同じ始点から r 周してできる cycle である。cycle C が reduced とは、C と C^2 がともに、backtracking をもたないことである。また、cycle C が prime とは、他の cycle B について $C\neq B^r$ となることである。

定義 1 (Sunada) *グラフ G の Ihara ゼータ関数*:

$$\mathbf{Z}(G,u)=Z_G(u)=\prod_{[C]}(1-u^{|C|})^{-1}.$$

ここで、$[C]$ は G の prime, reduced cycle の同値類全体を動き、$\mid C\mid$ は C の長さである。また、$u\in\mathbf{C}$ で、$\mid u\mid$ が十分小さいものとする。

グラフ G の prime, reduced cycle の同値類は、G のある点 v に対する G の基本群 $\pi_1(G,v)$ のただ一つの共役類に対応する。

2.2 Ihara の定理

G を n 点 $v_1,\cdots,v_n$ を持つ連結単純グラフとするとき、G の 隣接行列$\mathbf{A}(G)=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ を、$v_iv_j\in E(G)$(あるいは、$(v_i,v_j)\in D(G)$) のとき、$a_{ij}=1$, さもなければ、$a_{ij}=0$ と定義する。点 v_i の 次数 を、$\deg_G v_i=\mid\{v_j\mid v_iv_j\in E(G)\}\mid$ と定義する。G の各点 v について、$\deg_G v=k$(一定) のとき、G を k-正則グラフ という。

有理性 (行列式表示)：

定理 1 (Ihara) *G を連結 $(q+1)$-正則グラフのとき、G の Ihara ゼータ関数の逆数*:

$$\mathbf{Z}_G(u)^{-1}=(1-u^2)^{m-n}\det(\mathbf{I}-\mathbf{A}u+qu^2\mathbf{I}).$$

ここで、$m=\mid E(G)\mid,n=\mid V(G)\mid$ である。

$\ast\ m-n=\frac{1}{2}n(q+1)-n=\frac{1}{2}n(q-1).$

例 2　G の prime, reduced cycle の同値類は、$[C]$ と $[C^{-1}]$ (C^{-1} は C の inverse) のみだから、Ihara ゼータ関数の定義から、

$$\mathbf{Z}(K_3,u)^{-1}=(1-u^{|C|})(1-u^{|C^{-1}|})=(1-u^3)^2.$$

ところで、

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}(K_3)=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$$

定理 1 より、

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}(K_3,u)^{-1} &= (1-u^2)^{3-3}\det(\mathbf{I}-u\mathbf{A}+u^2\mathbf{I}) = \det\begin{bmatrix} 1+u^2 & -u & -u \\ -u & 1+u^2 & -u \\ -u & -u & 1+u^2 \end{bmatrix} \\ &= (1+u^2)^3-2u^3-3u^2(1+u^2) = 1-2u^3+u^6 = (1-u^3)^2.\end{aligned}$$

2.3 非正則グラフの Ihara ゼータ関数

グラフ G の点集合が、$V(G)=V_1\cup V_2$ と分割され、$u\in V_1, v\in V_2$ のときのみ、辺 uv が存在するようなグラフを、2 部グラフ という。また、$u\in V_i(i=1,2)$ のとき、$\deg_G u = q_i+1$ なる 2 部グラフを、(q_1+1,q_2+1)-半正則 2 部グラフ という。(q_1+1,q_2+1)-半正則 2 部グラフについて、グラフ $G^{[i]}$ を

$$V(G^{[i]})=V_i; E(G^{[i]})=\{C : reducedpath \quad | \mid C\mid = 2, o(C), t(C)\in V_i\}(i=1,2)$$

と定義する。

定理 2 (Hashimoto) G を連結 (q_1+1,q_2+1)-半正則 2 部グラフについて、$q_1\geq q_2$,$\mathbf{A}^{[i]}=\mathbf{A}(G^{[i]})(i=1,2)$, $\mid V_i\mid = n_i$, とおく。このとき、

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_G(u^{1/2})^{-1} &= (1-u)^{r-1}(1+q_2u)^{n_2-n_1}\det(\mathbf{I}_{n_1}-(\mathbf{A}^{[1]}-q_2+1)u+q_1q_2u^2\mathbf{I}_{n_1}) \\ &= (1-u)^{r-1}(1+q_1u)^{n_1-n_2}\det(\mathbf{I}_{n_2}-(\mathbf{A}^{[2]}-q_1+1)u+q_1q_2u^2\mathbf{I}_{n_2}).\end{aligned}$$

G を n 点 $v_1,\cdots,v_n$ と、m 辺を持つ連結グラフとするとき、$n\times n$ 対角行列 $\mathbf{D}=(d_{ij})$ を、$d_{ii}=\deg_G v_i$ と定義する。また、2 つの $m\times m$ 行列 $\mathbf{B}=\mathbf{B}(G)=((\mathbf{B})_{e,f})_{e,f\in D(G)}$ and $\mathbf{J}_0=\mathbf{J}_0(G)=((\mathbf{J})_{e,f})_{e,f\in D(G)}$ を、次のように与える：

$$(\mathbf{B})_{e,f}=\begin{cases}1 & \text{if } t(e)=o(f), \\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases} \quad (\mathbf{J})_{e,f}=\begin{cases}1 & \text{if } f=e^{-1}, \\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases}$$

$\mathbf{B}-\mathbf{J}_0$ は、G の edge matrix と呼ばれる。

定理 3 (Hashimoto; Bass) 連結グラフ G について、

$$\mathbf{Z}_G(u)^{-1}=\det(\mathbf{I}_m-t(\mathbf{B}-\mathbf{J}_0))=(1-u^2)^{m-n}\det(\mathbf{I}-u\mathbf{A}+u^2(\mathbf{D}-\mathbf{I})).$$

ここで、$m=\mid E(G)\mid, n=\mid V(G)\mid$.

3 グラフの Bartholdi ゼータ関数

G を連結グラフとする。G の cycle $\pi=(\pi_1,\cdots,\pi_n)$ の cyclic bump count $cbc(\pi)$ は、次のように定義される：

$$cbc(\pi)=\mid\{i=1,\cdots,n\mid \pi_i=\pi_{i+1}^{-1}\}\mid.$$

ここで、$\pi_{n+1}=\pi_1$ である。

定義 2 グラフ G の Bartholdi ゼータ関数：

$$\zeta_G(u,t) = \zeta(G,u,t) = \prod_{[C]} (1 - u^{cbc(C)} t^{|C|})^{-1}.$$

ここで、$[C]$ は、G の prime cycles の同値類全体を動き、$u, t \in \mathbf{C}$ で、$|\ u\ |, |\ t\ |$ は十分小さいものとする。

$u = 0$ ならば、G の Bartholdi ゼータ関数は、G の Ihara ゼータ関数である。

Bartholdi [2] は、グラフの Bartholdi ゼータ関数の行列式表示を与えた。

定理 4 (Bartholdi) G が n 点、m 辺をもつ、連結グラフのとき、G の Bartholdi ゼータ関数の逆数：

$$\zeta(G,u,t)^{-1} = \det(\mathbf{I}_m - t(\mathbf{B} - (1-u)\mathbf{J}_0))$$
$$= (1 - (1-u)^2 t^2)^{m-n} \det(\mathbf{I} - t\mathbf{A}(G) + (1-u)(\mathbf{D} - (1-u)\mathbf{I})t^2).$$

$u = 0$ の場合、定理 4 は定理 3 を与える。

定理 3,4 の証明において、Amitsur の定理 [1] が本質的な役割を果たす。Amitsur の定理 [1] について、簡単に述べる。

Foata and Zeilberger [5] は、Lyndon words の algebra を用いて、Bass の定理の新しい証明を与えた。その際に、Amitsur の等式 [1] の短い証明も与えた。X を空でない有限集合、$<$ を X 上の全順序前、X^* を X によって生成される free monoid とする。このとき、X 上の全順序 $<$ は、 X^* 上の辞書式順序 $<^*$ を誘導する。X の Lyndon word は、X^* の nonempty word で、prime, 即ち、他の word l の巾 l^r $(r \geq 2)$ でなく、かつ、その cyclic rearrangements において、$<^*$ の下で極小であると定義される。

定理 5 (Amitsur) 正方行列 $\mathbf{A}_1, \cdots, \mathbf{A}_k$ に対して、

$$\det(\mathbf{I} - (\mathbf{A}_1 + \cdots + \mathbf{A}_k)) = \prod_{l \in L} \det(\mathbf{I} - \mathbf{A}_l).$$

ここで、積は、$\{1, \cdots, k\}$, のすべての Lyndon words を亘る。また、$l = i_1 \cdots i_p$ について、$\mathbf{A}_l = \mathbf{A}_{i_1} \cdots \mathbf{A}_{i_p}$ とする。

参考文献

[1] S. A. Amitsur, On the characteristic polynomial of a sum of matrices, Linear and Multilinear Algebra **9** (1980) 177-182.

[2] L. Bartholdi, Counting paths in graphs, Enseign. Math. **45** (1999), 83-131.

[3] H. Bass, The Ihara-Selberg zeta function of a tree lattice, Internat. J. Math. **3** (1992), 717-797.

[4] Y. Choe, J. H. Kwak, Y. S. Park and I. Sato, Bartholdi zeta and L-functions of weighted digraphs, their coverings and products, Adv. Math. **213** (2007), 865-886.

[5] D. Foata and D. Zeilberger, A combinatorial proof of Bass's evaluations of the Ihara-Selberg zeta function for graphs, Trans. Amer. Math. Soc. **351** (1999),2257-2274.

[6] K. Hashimoto, Zeta Functions of Finite Graphs and Representations of p-Adic Groups, Adv. Stud. Pure Math. Vol. 15, pp. 211-280, Academic Press, New York (1989).

[7] K. Hashimoto, On the zeta- and L-functions of finite graphs, Internat. J. Math. **1** (1990), 381-396.

[8] J. W. Hoffman, Remarks on the zeta function of a graph, Dynamical systems and differential equations (Wilmington, NC, 2002). Discrete Contin. Dyn. Syst. 2003, suppl., 413-422.

[9] Y. Ihara, On discrete subgroups of the two by two projective linear group over p-adic fields, J. Math. Soc. Japan **18** (1966), 219-235.

[10] M. Kotani and T. Sunada, Zeta functions of finite graphs, J. Math. Sci. U. Tokyo **7** (2000), 7-25.

[11] S. Northshield, Two proofs of Ihara's theorem, Emerging applications of number theory (Minneapolis, MN, 1996), 469–478, IMA Vol. Math. Appl., 109, Springer, New York, 1999.

[12] J. -P. Serre, *Trees,* Springer-Verlag, New York, 1980.

[13] H. M. Stark and A. A. Terras, Zeta functions of finite graphs and coverings, Adv. Math. **121** (1996), 124-165.

[14] T. Sunada, L-Functions in Geometry and Some Applications, in Lecture Notes in Math., Vol. 1201, pp. 266-284, Springer-Verlag, New York (1986).

[15] 砂田利一, 「基本群とラプラシアン」, 紀伊国屋 (1988).