境界付き超曲面の幾何学的時間発展方程式による挙動について[1]

高坂良史[2]
(室蘭工業大学ひと文化系領域数理科学)

1　序章

本研究報告は，2008 年 8 月 19 日〜2009 年 3 月 29 日の期間，ドイツの Regensburg 大学に滞在したときに研究した研究内容，およびそのときに考えた今後の研究課題に関する研究報告である．下記の (1)，(2) について報告する．

(1) 互いに交わる 3 つの超曲面の幾何学的時間発展方程式による挙動の解析.

(2) 表面拡散方程式による回転面の挙動の解析.

(1) については，上記の期間に得た時間局所解の存在に関する結果について述べる．(2) については，残念ながら新たな結果は得ていないが，関係論文を紹介しながら今後の課題について概説したいと思う.

2　互いに交わる 3 つの超曲面の挙動

平均曲率流方程式によって時間発展する超曲面の挙動について考える．より具体的には，以下の設定のもとで考える．今，時間発展する超曲面を $\Gamma^i(t) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ $(i = 1, 2, 3)$ とし，これらは互いの境界で交わっているとする．つまり，

$$\partial\Gamma^1(t) = \partial\Gamma^2(t) = \partial\Gamma^3(t)\ (=: \Sigma(t)).$$

このとき，$\Sigma(t)$ は $(n-1)$-次元の多様体である．3 つの超曲面の運動は次の式で記述されているとする．

$$\begin{cases} V^i = \gamma^i H^i \quad \text{on} \quad \Gamma^i(t),\ t \in [0, T] \ \ (i = 1, 2, 3), \\ \angle(\Gamma^i(t), \Gamma^j(t)) = \theta^k \quad \text{on} \ \ \Sigma(t),\ t \in [0, T], \\ \qquad ((i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)) \\ \Gamma^i(t)|_{t=0} = \Gamma^i_0 \ \ (i = 1, 2, 3). \end{cases} \tag{2.1}$$

ここで，V^i は $\Gamma^i(t)$ の法速度，H^i は $\Gamma^i(t)$ の平均曲率，γ^i は表面エネルギー密度を表す定数である．また，θ^i $(i = 1, 2, 3)$ は定数で $0 < \theta^i < \pi$ を満たすとし，さらに θ^i $(i = 1, 2, 3)$ は Young's law と呼ばれる以下の関係式を満たすと仮定する．

$$\frac{\sin\theta^1}{\gamma^1} = \frac{\sin\theta^2}{\gamma^2} = \frac{\sin\theta^3}{\gamma^3}. \tag{2.2}$$

最後に，Γ^i_0 $(i = 1, 2, 3)$ は初期曲面を表し，互いに交わっているとする．つまり，$\partial\Gamma^1_0 = \partial\Gamma^2_0 = \partial\Gamma^3_0\ (=: \Sigma_0)$.

[1]本研究の前半部分は Regensburg 大学の D. Depner 氏，H. Garcke 氏との共同研究である．

[2]e-mail: kohsaka@mmm.muroran-it.ac.jp

注意 1. $\nu^i(\cdot,t)\,(i=1,2,3)$ を $\partial\Gamma^i(t)$ の単位余法線ベクトルとする．角度条件 $\angle(\Gamma^i(t),\Gamma^j(t))=\theta^k\ ((i,j,k)=(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2))$ が成り立つもとで，(2.2) は以下のようにも表される．

$$\gamma^1\nu^1(\cdot,t)+\gamma^2\nu^2(\cdot,t)+\gamma^3\nu^3(\cdot,t)=0 \quad \text{on} \quad \Sigma(t).$$

また，$N^i(\cdot,t)\,(i=1,2,3)$ を $\Gamma^i(t)$ の単位法線ベクトルとする．向きは ν^i と N^i が張る平面上において，ν^i を反時計回りに 90° 回転して得られる向きとする．このとき，

$$\gamma^1N^1(\cdot,t)+\gamma^2N^2(\cdot,t)+\gamma^3N^3(\cdot,t)=0 \quad \text{on} \quad \Sigma(t)$$

も得ることができる．

幾何学的時間発展方程式に関する問題 (2.1) を，非線形偏微分方程式の問題として考えるために，$\Gamma^i(t)\,(i=1,2,3)$ を reference manifolds $\Gamma^i_*\,(i=1,2,3)$ 上の関数 $\rho^i:\Gamma^i_*\times[0,T]\to\mathbb{R}$ によって表す．ここで，$\Gamma^i_*\,(i=1,2,3)$ は $\partial\Gamma^1_*=\partial\Gamma^2_*=\partial\Gamma^3_*\,(=:\Sigma_*)$ を満たすとする．また，ν^i_* を $\partial\Gamma^i_*$ の単位余法線ベクトル，N^i_* を Γ^i_* の単位法線ベクトルとし，N^i_* の向きは μ^i_* に対して上記の注意 1 のようにとるものとする．今，$\sigma\in\Gamma^i_*$ に対して，σ を含む座標近傍 (U,ϕ) をとる．このとき，$\phi(\sigma)$ は $\mathbb{R}^n$ の座標を用いて $\phi(\sigma)=(\sigma_1(\sigma),\cdots,\sigma_n(\sigma))\in\mathbb{R}^n$ と表すことができる．ここで，U と $\phi(U)$ を同一視し，この約束のもとで，$w:\Gamma_*\to\mathbb{R}$ を，正確には

$$w(\sigma)=w\circ\phi^{-1}(\sigma_1(\sigma),\cdots,\sigma_n(\sigma))$$

で表すべきだが，簡単に

$$w(\sigma)=w(\sigma_1,\cdots,\sigma_n) \quad (\sigma\in U\subset\Gamma^i_*)$$

と表すことにする．

$\Gamma^i_*\,(i=1,2,3)$ の近傍にある超曲面をパラメータ表示するために，写像 Ψ^i を

$$\begin{aligned}\Psi^i\ :\ \Gamma^i_*\times(-\varepsilon,\varepsilon)\times(-\delta,\delta) &\ \to\ \mathbb{R}^{n+1},\\ (\sigma,w,r) &\ \mapsto\ \Psi^i(\sigma,w,r):=\sigma+w\,N^i_*(\sigma)+r\,\tau^i_*(\sigma)\end{aligned}$$

によって定義する．ただし，τ^i_* は Γ^i_* 上の接ベクトル場であり，$\partial\Gamma^i_*$ 上では単位余法線ベクトル ν^i_* と一致するものとする．このとき，関数

$$\rho^i:\Gamma^i_*\times[0,T]\to\mathbb{R},\quad \mu^i:\Sigma_*\times[0,T]\to\mathbb{R}\quad (i=1,2,3)$$

に対して，写像 $\Phi^i=\Phi^i_{\rho^i,\mu^i}$ を

$$\begin{aligned}\Phi^i:\Gamma^i_*\times[0,T] &\ \to\ \mathbb{R}^{n+1},\\ (\sigma,t) &\ \mapsto\ \Phi^i(\sigma,t):=\Psi^i(\sigma,\rho^i(\sigma,t),\mu^i(\mathrm{pr}^i(\sigma),t))\end{aligned}$$

によって定義する．ここで，$\mathrm{pr}^i\ :\ \Gamma^i_*\to\partial\Gamma^i_*$ は正射影を表す．$t>0$ に対して

$$(\Phi^i)_t\ :\ \Gamma^i_*\to\mathbb{R}^{n+1},\quad (\Phi^i)_t(\sigma):=\Phi^i(\sigma,t)$$

とし，Γ^i_* の近傍で時間発展する超曲面 $\Gamma^i(t)$ を

$$\Gamma^i(t):=\Gamma_{\rho^i,\mu^i}(t)=\mathrm{image}((\Phi^i)_t)$$

によって定義する．このとき，$\rho^i \equiv 0$ かつ $\mu^i \equiv 0$ であれば，$\Gamma_{\rho^i\equiv 0, \mu^i \equiv 0}(t) = \Gamma^i_*$ が成り立つことを注意する．

このパラメータ表示を用いることにより，超曲面が $\Sigma(t)$ で互いに交わるという条件は

$$\Phi^1(\sigma,t) = \Phi^2(\sigma,t) = \Phi^3(\sigma,t) \quad \text{for} \quad \sigma \in \Sigma_*,\ t \geq 0 \tag{2.3}$$

と表記できる．ここで，Σ_* 上では N^1_*, ν^1_*, N^2_*, ν^2_*, N^3_*, ν^3_* は同一平面上にあるので，$\sigma \in \Sigma_*$, $t \geq 0$ に対して (2.3) を

$$\rho^i(\sigma,t)N^i_*(\sigma) + \mu^i(\sigma,t)\nu^i_*(\sigma) = \rho^j(\sigma,t)N^j_*(\sigma) + \mu^j(\sigma,t)\nu^j_*(\sigma)$$

と表すこともできる．ただし，$(i,j) = (1,2), (2,3), (3,1)$．このとき，$\nu^i_*$ との内積をとると，

$$\mu^i(\sigma,t) = -\rho^j(\sigma,t)\sin\theta^k + \mu^j(\sigma,t)\cos\theta^k$$

を得る．$c^i := \cos\theta^i$，$s^i := \sin\theta^i$ とおき，μ^i に関する連立 1 次方程式を解くと，

$$(1 - c^1c^2c^3)\mu^i(\sigma,t) = -(c^kc^is^j\rho^i(\sigma,t) + s^k\rho^j(\sigma,t) + c^ks^i\rho^k(\sigma,t)) \tag{2.4}$$

が成り立つ．ただし，$(i,j) = (1,2), (2,3), (3,1)$ である．今後，条件 (2.3) は常に成り立つと仮定する．

上記のパラメータ表示によって，$\Gamma^i(t)$ の単位法線ベクトル N^i は

$$(N^i \circ \Phi^i)(\sigma,t) = \widetilde{N}^i(\sigma, \rho^i(\sigma,t), \mu^i(\mathrm{pr}^i(\sigma),t), \nabla\rho^i(\sigma,t), \nabla\mu^i(\mathrm{pr}^i(\sigma),t))$$

と表されるので，法速度 V^i は

$$\begin{aligned}
&(V^i \circ \Phi^i)(\sigma,t) \\
&= \langle \partial_t\Phi^i(\sigma,t), (N^i \circ \Phi^i)(\sigma,t)\rangle \\
&= \langle N^i_*(\sigma), (N^i \circ \Phi^i)(\sigma,t)\rangle\, \partial_t\rho^i(\sigma,t) + \langle \tau^i_*(\sigma), (N^i \circ \Phi^i)(\sigma,t)\rangle\, \partial_t\mu^i(\mathrm{pr}^i(\sigma),t)
\end{aligned}$$

によって表される．ただし，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の内積とし，∇w は局所座標系を用いて $(\nabla w)_j = \nabla_j w = \partial_j w\ (j = 1, \cdots, n)$ と定義される．また，第 1 基本量および第 2 基本量が

$$(g^i)_{jk} = \langle \partial_j\Phi^i, \partial_k\Phi^i\rangle, \quad (h^i)_{jk} = \langle \partial_j\partial_k\Phi^i, N^i \circ \Phi^i\rangle$$

と表されるので，平均曲率 $H^i = (g^i)^{jk}(h^i)_{jk}$ は

$$\begin{aligned}
&(H^i \circ \Phi^i)(\sigma,t) \\
&= \widetilde{H}^i(\sigma, \rho^i(\sigma,t), \mu^i(\mathrm{pr}^i(\sigma),t), \nabla\rho^i(\sigma,t), \nabla\mu^i(\mathrm{pr}^i(\sigma),t), \nabla^2\rho^i(\sigma,t), \nabla^2\mu^i(\mathrm{pr}^i(\sigma),t))
\end{aligned}$$

によって表される．ただし，$\nabla^2 w$ は局所座標系を用いて $(\nabla^2 w)_{j_1j_2} = \nabla_{j_1}\nabla_{j_2}w = \partial_{j_1}\partial_{j_2}w - \Gamma^k_{j_1j_2}\partial_k w\ \ (j_1, j_2, k = 1, \cdots, n)$ と定義される．この結果，平均曲率流方程式 $V^i = \gamma^i H^i$ は

$$\rho^i_t = a^i(\sigma, \rho^i, \mu^i)H^i(\sigma, \rho^i, \mu^i) + b^i(\sigma, \rho^i, \mu^i)\mu^i_t \tag{2.5}$$

と表される．ただし，

$$
\begin{aligned}
H^i(\sigma,\rho^i,\mu^i) &= \widetilde{H}^i(\sigma,\rho^i,\mu^i,\nabla\rho^i,\nabla\mu^i,\nabla^2\rho^i,\nabla^2\mu^i),\\
a^i(\sigma,\rho^i,\mu^i) &= \widetilde{a}^i(\sigma,\rho^i,\mu^i,\nabla\rho^i,\nabla\mu^i) = \frac{\gamma^i}{\langle N_*^i(\sigma),\widetilde{N}^i(\sigma,\rho^i,\mu^i,\nabla\rho^i,\nabla\mu^i)\rangle},\\
b^i(\sigma,\rho^i,\mu^i) &= \widetilde{b}^i(\sigma,\rho^i,\mu^i,\nabla\rho^i,\nabla\mu^i) = \frac{\langle \tau_*^i(\sigma),\widetilde{N}^i(\sigma,\rho^i,\mu^i,\nabla\rho^i,\nabla\mu^i)\rangle}{\langle N_*^i(\sigma),\widetilde{N}^i(\sigma,\rho^i,\mu^i,\nabla\rho^i,\nabla\mu^i)\rangle}
\end{aligned}
$$

である．このとき，(2.4) と (2.5) を用いると，$\sigma\in\Sigma_*$ に対して

$$
\begin{pmatrix}\mu_t^1\\ \mu_t^2\\ \mu_t^3\end{pmatrix} = \mathcal{T}\begin{pmatrix}\rho_t^1\\ \rho_t^2\\ \rho_t^3\end{pmatrix}\Bigg|_{\Sigma_*} = \mathcal{P}(\sigma,\rho^i,\boldsymbol{\rho}|_{\Sigma_*})|_{\Sigma_*}\begin{pmatrix}\mathcal{F}^1(\sigma,\rho^i,\boldsymbol{\rho}|_{\Sigma_*})\\ \mathcal{F}^2(\sigma,\rho^i,\boldsymbol{\rho}|_{\Sigma_*})\\ \mathcal{F}^3(\sigma,\rho^i,\boldsymbol{\rho}|_{\Sigma_*})\end{pmatrix}\Bigg|_{\Sigma_*}
$$

とできる．ただし，$\boldsymbol{\rho}=(\rho^1,\rho^2,\rho^3)$ に対して，$\mathcal{F}^i(\sigma,\rho^i,\boldsymbol{\rho}|_{\Sigma_*}) = a^i(\sigma,\rho^i,\boldsymbol{\rho}|_{\Sigma_*})H^i(\sigma,\rho^i,\boldsymbol{\rho}|_{\Sigma_*})$ であり，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T} &= -\frac{1}{1-c^1c^2c^3}\begin{pmatrix} c^3c^1s^2 & s^3 & c^3s^1\\ c^1s^2 & c^1c^2s^3 & s^1\\ s^2 & c^2s^3 & c^2c^3s^1\end{pmatrix},\\
\mathcal{P}(\sigma,\rho^i,\boldsymbol{\rho}|_{\Sigma_*}) &= \mathcal{T}\big\{\mathrm{Id}-\mathrm{diag}\big[b^1(\sigma,\rho^i,\boldsymbol{\rho}|_{\Sigma_*}),b^2(\sigma,\rho^i,\boldsymbol{\rho}|_{\Sigma_*}),b^3(\sigma,\rho^i,\boldsymbol{\rho}|_{\Sigma_*})\big]\mathcal{T}\big\}^{-1}
\end{aligned}
$$

である．よって，この関係式から，(2.5) は $\boldsymbol{\rho}$ に関する次の式に書き直される．

$$
\rho_t^i = \mathcal{F}^i(\sigma,\rho^i,\boldsymbol{\rho}|_{\Sigma_*}) + b^i(\sigma,\rho^i,\boldsymbol{\rho}|_{\Sigma_*})\Big\{\sum_{j=1}^{3}\mathcal{P}^{ij}(\sigma,\rho^i,\boldsymbol{\rho}|_{\Sigma_*})\mathcal{F}^j(\sigma,\rho^i,\boldsymbol{\rho}|_{\Sigma_*})\Big\}\Big|_{\Sigma_*}. \tag{2.6}
$$

この方程式の右辺の第 2 項は，2 階の導関数を含む非局所項である．この方程式に境界条件

$$
\begin{cases}
\gamma^1\rho^1+\gamma^2\rho^2+\gamma^3\rho^3 = 0 \quad \text{on } \Sigma_*,\\
\langle N^1\circ\Phi^1, N^2\circ\Phi^2\rangle = \cos\theta^3 \quad \text{on } \Sigma_*,\\
\langle N^1\circ\Phi^1, N^3\circ\Phi^3\rangle = \cos\theta^2 \quad \text{on } \Sigma_*
\end{cases} \tag{2.7}
$$

と初期条件 $\rho(\sigma,0)=\rho_0(\sigma)\,(\sigma\in\Sigma_*)$ を付したものが，(2.1) に対応する非線形偏微分方程式の初期値・境界値問題である．

今，$\Gamma_*=\Gamma_0$ とし，$Q_T^i=\Gamma_0^i\times[0,T]$ とおく．また

$$
\mathcal{X}_T = C^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(Q_T^1)\times C^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(Q_T^2)\times C^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(Q_T^3)
$$

とおく．このとき，次の定理を得る．

Theorem 2.1
ある $\delta>0$ が存在して，初期値・境界値問題 (2.6), (2.7), $\rho^i(s,0)\equiv 0$ はただ 1 つの解 $(\rho^1,\rho^2,\rho^3)\in\mathcal{X}_\delta$ をもつ．

この定理の証明は，以下の手順で行われる．

Step 1. 初期値の周りで線形化し，対応する線形化問題を導出する．(導出される方程式は非局所項をもつ 2 階線形放物型偏微分方程式となる.)

Step 2. 非局所項を除いた線形方程式に対して，Galerkin 法 (cf. [8]) を用いて

$$\mathcal{E} = \{\boldsymbol{u} \in \mathcal{H}^1 \mid \gamma^1 u^1 + \gamma^2 u^2 + \gamma^3 u^3 = 0\} \quad (\mathcal{H}^1 = H^1(\Gamma_0^1) \times H^1(\Gamma_0^2) \times H^1(\Gamma_0^3))$$

において弱解を得る．

Step 3. Campanato 空間 (cf. [7, 10]) を用いた Giaquinta-Modica [11]，Schlag [19]，三沢 [18] 等の手法を利用して，Schauder 評価を導出する．

Step 4. perturbation argument (cf. [6]) により非局所項をもつ線形方程式に対しても評価を導出する．

Step 5. 不動点定理を用いて非線形問題に対して解を得る．

本稿では，今回扱っている方程式の特徴的な部分である非局所項の評価についてのみ述べる．したがって，Step 5 のみ考える．

今，$R > 0$ に対して，$\mathcal{D}_R$ を

$$\mathcal{D}_R = \Big\{(v^1, v^2, v^3) \in \mathcal{X}_\delta \,\Big|\, v^i(\sigma, 0) = 0,\ \sum_{i=1}^{3} \|v^i\|_{C^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(Q_\delta^i)} \le R\Big\}$$

によって定義する．ただし，$\delta > 0$ は十分小さいものとする．また，$(v^1, v^2, v^3) \in \mathcal{D}_R$ に対して，写像 Λ を $(u^1, u^2, u^3) = \Lambda(v^1, v^2, v^3)$ によって定義する．ここで，(u^1, u^2, u^3) は，Step 1 によって得られる線形方程式に対する初期値・境界値問題

$$\begin{cases} u_t^i = \mathcal{A}^i(\sigma, \nabla) u^i + \zeta^i(\sigma) \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \mathcal{T}^{ij} u^j|_{\Sigma_0} + f^i(\sigma, v^i(\sigma, t), \boldsymbol{v}(\sigma, t)|_{\Sigma_0}) \ \text{ on } \ \Gamma_0^i \times [0, T], \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \mathcal{B}^{ij}(\sigma, \nabla) u^j = g^i(\sigma, \boldsymbol{v}(\sigma, t)) \ \text{ on } \ \Sigma_0 \times [0, T], \\ u^i(\sigma, 0) = 0 \ \text{ on } \ \Gamma_0^i \end{cases}$$

の解である．写像 Λ が $\mathcal{D}_R$ から $\mathcal{D}_R$ への縮小写像であることを示そう．そこで，(v^1, v^2, v^3)，$(w^1, w^2, w^3) \in \mathcal{D}_R$ に対して，$(u^1, u^2, u^3) = \Lambda(v^1, v^2, v^3) - \Lambda(w^1, w^2, w^3)$ は

$$\begin{cases} u_t^i = \mathcal{A}^i(\sigma, \nabla) u^i + \zeta^i(\sigma) \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \mathcal{T}^{ij}(\sigma) u^j|_{\Sigma_0} \\ \qquad + f^i(\sigma, v^i(\sigma, t), \boldsymbol{v}(\sigma, t)|_{\Sigma_0}) - f^i(\sigma, w^i(\sigma, t), \boldsymbol{w}(\sigma, t)|_{\Sigma_0}) \ \text{ on } \ \Gamma_0^i \times [0, \delta], \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \mathcal{B}^{ij}(\sigma, \nabla) u^j = g^i(\sigma, \boldsymbol{v}(\sigma, t)) - g^i(\sigma, \boldsymbol{w}(\sigma, t)) \ \text{ on } \ \Sigma_0 \times [0, \delta], \\ u^i(\sigma, 0) = 0 \ \text{ on } \ \Gamma_0^i \end{cases} \tag{2.8}$$

の解であるとする．ただし，$i=1,2,3$ である．このとき，Step 4 までに得た線形方程式に対する評価によって，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{3}\|u^i\|_{C^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(Q^i_{\delta_0})}\\
&\le C\sum_{i=1}^{3}\Big\{\|f^i(\sigma,v^i(\sigma,t),\boldsymbol{v}(\sigma,t)|_{\Sigma_0})-f^i(\sigma,w^i(\sigma,t),\boldsymbol{w}(\sigma,t)|_{\Sigma_0})\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(Q^i_{\delta_0})}\\
&\qquad\qquad +\|g^i(\sigma,\boldsymbol{v}(\sigma,t))-g^i(\sigma,\boldsymbol{w}(\sigma,t))\|_{C^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\Sigma_0\times[0,\delta_0])}\Big\}
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

を得る．不動点定理を適用するために，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{3}\Big\{\|f^i(\sigma,v^i(\sigma,t),\boldsymbol{v}(\sigma,t)|_{\Sigma_0})-f^i(\sigma,w^i(\sigma,t),\boldsymbol{w}(\sigma,t)|_{\Sigma_0})\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(Q^i_{\delta_0})}\\
&\qquad +\|g^i(\sigma,\boldsymbol{v}(\sigma,t))-g^i(\sigma,\boldsymbol{w}(\sigma,t))\|_{C^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\Sigma_0\times[0,\delta_0])}\Big\}\\
&\le K(R)\delta^{\alpha/2}\sum_{i=1}^{3}\|v^i-w^i\|_{C^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(Q^i_{\delta_0})}
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

を導く．(2.9) と (2.10) より，$\delta>0$ を十分小さくとれば，写像 Λ が縮小写像となることが示される．(2.10) の非局所項以外の部分は [17, Chapter 8, pp. 322–325] と同様にして導くことができるので，非局所項の 2 階導関数を含む部分についてのみ評価を導く．ここで，$\mathcal{F}^i(\sigma,v^i,\boldsymbol{v}|_{\Sigma_0})$ は $\nabla^2 v^i|_{\Sigma_0}$ $(i=1,2,3)$ に関して線形であることと，$\nabla^2 v^i|_{\Sigma_0}$ $(i=1,2,3)$ の係数に

$$
b^i(\sigma,v^i,\boldsymbol{v}|_{\Sigma_0})=\frac{\langle \nu_0^i(\sigma),N^i(\sigma,v^i,\boldsymbol{v}|_{\Sigma_0})\rangle}{\langle N_0^i(\sigma),N^i(\sigma,v^i,\boldsymbol{v}|_{\Sigma_0})\rangle}
$$

がかかっていて，$b^i(\sigma,v^i,\boldsymbol{v}|_{\Sigma_0})|_{t=0}=0$ であることに注意する．$\nabla^2 v^1|_{\Sigma_0}$ を含む項についてのみ評価を導く．($\nabla^2 v^i|_{\Sigma_0}$ $(i=2,3)$ を含む項については同様にして評価を導くことができるので，それらは省略する.) 今，$\nabla^2 v^1|_{\Sigma_0}$ の係数を $\eta^1(\sigma,v^i,\boldsymbol{v}|_{\Sigma_0})$ と表すことにする．$\eta^1(\sigma,v^i,\boldsymbol{v}|_{\Sigma_0})$ は $b^i(\sigma,v^i,\boldsymbol{v}|_{\Sigma_0})$ を積の形で含んでいるので，

$$
\eta^1(\sigma,v^i(\sigma,t),\boldsymbol{v}(\sigma,t)|_{\Sigma_0})|_{t=0}=0,
$$

が成り立つ．また，依存性を明記すると，$\eta^1(\sigma,v^i,\boldsymbol{v}|_{\Sigma_0})=\widetilde{\eta}^1(\sigma,v^i,\boldsymbol{v}|_{\Sigma_0},\nabla v^i,\nabla\boldsymbol{v}|_{\Sigma_0})$ となる．$F(\sigma,v^i,\boldsymbol{v}|_{\Sigma_0})=\eta^1(\sigma,v^i,\boldsymbol{v}|_{\Sigma_0})\nabla_j\nabla_k v^1|_{\Sigma_0}$ とおくと，$F(\sigma,v^i,\boldsymbol{v}|_{\Sigma_0})-F(\sigma,w^i,\boldsymbol{w}|_{\Sigma_0})$ は

$$
\begin{aligned}
&F(\sigma,v^i(\sigma,t),\boldsymbol{v}(\sigma,t)|_{\Sigma_0})-F(\sigma,w^i(\sigma,t),\boldsymbol{w}(\sigma,t)|_{\Sigma_0})\\
&=\Xi^1_1(\sigma,t)(v^1-w^1)(\sigma,t)+\sum_{i=1}^{3}\Xi^i_1(\sigma,t)(v^i-w^i)(\sigma,t)|_{\Sigma_0}\\
&\quad+\sum_{j=1}^{n}\Big\{\Xi^1_{2,j}(\sigma,t)\nabla_j(v^1-w^1)(\sigma,t)+\sum_{i=1}^{3}\Xi^i_{2,j}(\sigma,t)\nabla_j(v^i-w^i)(\sigma,t)|_{\Sigma_0}\Big\}\\
&\quad+\sum_{j_1,j_2=1}^{n}\Xi^2_{3,j_1j_2}(\sigma,t)\nabla_{j_1}\nabla_{j_2}(v^2-w^2)(\sigma,t)|_{\Sigma_0}
\end{aligned}
$$

と表される．ただし，$i=1,2,3$ に対して，

$$
\begin{aligned}
\Xi_1^i(\sigma,t) &= \int_0^1 F_{v^i}(\sigma, sv^i+(1-s)w^i, s\boldsymbol{v}+(1-s)\boldsymbol{w})\,ds,\\
\Xi_{2,j}^i(\sigma,t) &= \int_0^1 F_{p_j^i}(\sigma, sv^i+(1-s)w^i, s\boldsymbol{v}+(1-s)\boldsymbol{w})\,ds,\\
\Xi_{3,j_1j_2}^i(\sigma,t) &= \int_0^1 F_{q_{j_1j_2}^i}(\sigma, sv^i+(1-s)w^i, s\boldsymbol{v}+(1-s)\boldsymbol{w})\,ds
\end{aligned}
$$

である．

$$\Xi_1^i(\sigma,0)=\Xi_{2,j}^i(\sigma,0)=\Xi_{3,j_1j_2}^i(\sigma,0)=0$$

に注意すると，

$$\|\Xi\|_\infty \le \delta^{\alpha/2}\langle\Xi\rangle_t^{\alpha/2} \le C(R)\delta^{\alpha/2}$$

を得る．ここで，Ξ は Ξ_1^i または $\Xi_{2,j}^i$ または $\Xi_{3,j_1j_2}^i$ を意味する． この結果，

$$\|F(\cdot,v^i,\boldsymbol{v}|_{\Sigma_0})-F(\cdot,w^i,\boldsymbol{w}|_{\Sigma_0})\|_\infty \le C(R)\delta^{\alpha/2}\sum_{i=1}^3 \|v^i-w^i\|_{C^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(Q_{\delta_0}^i)}$$

を得る．さらに，$\{\nabla^k(v^i-w^i)\}_{j_1\cdots j_k}|_{t=0}=0$ $(i=1,2,3,\ k=0,1,2)$ から，ある定数 $C>0$ が存在して

$$\|\{\nabla^k(v^i-w^i)\}_{j_1\cdots j_k}\|_\infty \le C\delta^{\alpha/2}\langle\{\nabla^k(v^i-w^i)\}_{j_1\cdots j_k}\rangle_t^{\alpha/2}$$

が成り立つ．$[\,\cdot\,]_{C^{\alpha,\alpha/2}}=\langle\,\cdot\,\rangle_x^\alpha+\langle\,\cdot\,\rangle_t^{\alpha/2}$ とすると，$k=0,1,2$ に対して

$$
\begin{aligned}
&[\,\Xi\{\nabla^k(v^i-w^i)\}_{j_1\cdots j_k}\,]_{C^{\alpha,\alpha/2}}\\
&\le \|\Xi\|_\infty[\,\{\nabla^k(v^i-w^i)\}_{j_1\cdots j_k}\,]_{C^{\alpha,\alpha/2}}+[\,\Xi\,]_{C^{\alpha,\alpha/2}}\|\{\nabla^k(v^i-w^i)\}_{j_1\cdots j_k}\|_\infty\\
&\le C(R)\delta^{\alpha/2}\sum_{i=1}^3\|v^i-w^i\|_{C^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(Q_{\delta_0}^i)}
\end{aligned}
$$

を得る．ここで，Ξ は上記と同様に Ξ_1^i または $\Xi_{2,j}^i$ または $\Xi_{3,j_1j_2}^i$ を意味する．よって，

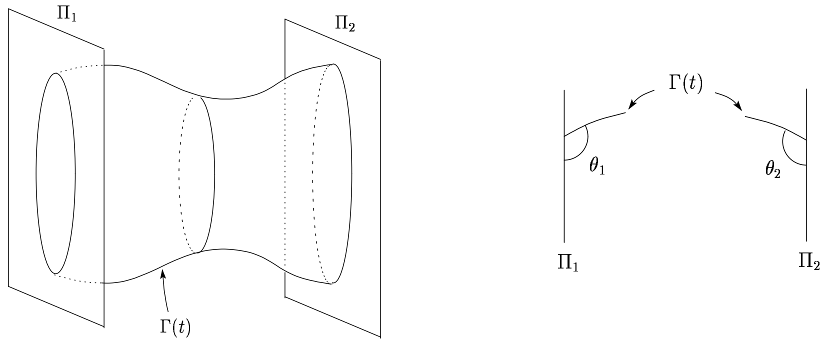
$$[\,F(\cdot,v^i,\boldsymbol{v}|_{\Sigma_0})-F(\cdot,w^i,\boldsymbol{w}|_{\Sigma_0})\,]_{C^{\alpha,\alpha/2}} \le C(R)\delta^{\alpha/2}\sum_{i=1}^3\|v^i-w^i\|_{C^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(Q_{\delta_0}^i)}.$$

を得る．

3 表面拡散方程式による回転面の挙動の解析

$\mathbb{R}^3$ 内の 2 つの平面 Π_i $(i=1,2)$ を考え，Π_1, Π_2 にはさまれた回転面 $\Gamma(t)$ の以下の幾何学的時間発展方程式による挙動を考える．

$$
\begin{cases}
V=-\Delta_\Gamma H \quad \text{on } \Gamma(t),\\
\angle(\Gamma(t),\Pi_i)=\theta_i \quad \text{on } \Gamma(t)\cap\Pi_i,\\
\langle\nabla_\Gamma H,\nu_i\rangle=0 \quad \text{on } \Gamma(t)\cap\Pi_i,\\
\Gamma(0)=\Gamma_0.
\end{cases}
\tag{3.1}
$$



ここで，V は $\Gamma(t)$ の法速度，H は $\Gamma(t)$ の平均曲率，Δ_Γ は Γ 上の Laplace-Beltrami 作用素，∇_Γ は surface gradient，ν_i は $\Gamma(t)\cap\Pi_i$ での $\Gamma(t)$ の単位余法線ベクトルである．幾何学的時間発展方程式 $V=-\Delta_\Gamma H$ は表面拡散方程式と呼ばれ，$\Gamma(t)$ の表面積を表す汎関数の H^{-1}–勾配流として表される．また，(3.1) に対する定常曲面 ($V\equiv 0$ の場合の曲面) は平均曲率一定曲面となる．

回転面 $\Gamma(t)$ に対する表面拡散方程式および境界条件を導く．まず，回転面 $\Gamma(t)$ の平均曲率および Laplace-Beltrami 作用素 $\Delta_{\Gamma(t)}$ を求める．関数 $\rho:[0,d]\times[0,T]\to\mathbb{R}$ に対して，

$$\Gamma(t)=\Gamma_{\rho(\cdot,t)}=\{(x,\rho(x,t)\boldsymbol{\xi})\in\mathbb{R}^{n+1}\,|\,0\le x\le d,\ \boldsymbol{\xi}\in S^{n-1}\},$$

とする．ただし，$d=\mathrm{dist}(\Pi_1,\Pi_2)$ である．$\Gamma(t)$ の平均曲率 H は

$$H=H(\rho)=\frac{\rho_{xx}}{(1+\rho_x^2)^{3/2}}-\frac{n-1}{\rho(1+\rho_x^2)^{1/2}} \tag{3.2}$$

と表され，また，関数 $f(x,\xi_1,\cdots,\xi_{n-1})$ に対して，$\Delta_{\Gamma(t)}f$ は

$$\begin{aligned}\Delta_{\Gamma(t)}f=&\frac{1}{(1+\rho_x^2)^{1/2}\rho^{n-1}}\partial_x\left[\frac{\rho^{n-1}}{(1+\rho_x^2)^{1/2}}\partial_x f\right]\\&+\frac{1}{\rho^2}\sum_{i,j=1}^{n-1}(\delta_{ij}-\xi_i\xi_j)\partial_i\partial_j f-\frac{n-1}{\rho^2}\sum_{j=1}^{n-1}\xi_j\partial_j f\end{aligned}$$

で表される．ここで，(3.2) より $H=H(\rho)$ は $\xi_i\,(i=1,\cdots,n-1)$ に依存しないことが分かるので，

$$\Delta_{\Gamma(t)}H(\rho)=\frac{1}{(1+\rho_x^2)^{1/2}\rho^{n-1}}\partial_x\left[\frac{\rho^{n-1}}{(1+\rho_x^2)^{1/2}}\partial_x H(\rho)\right]$$

を得る．一方，$\Gamma(t)$ の法速度 V は

$$V=\frac{\rho_t}{(1+\rho_x^2)^{1/2}}$$

と表せるから，回転面に対する表面拡散方程式は

$$\rho_t=-\frac{1}{\rho^{n-1}}\partial_x\left[\frac{\rho^{n-1}}{(1+\rho_x^2)^{1/2}}\partial_x H(\rho)\right]$$

となる．また，(3.1) の境界条件は，

$$
\begin{cases}
\dfrac{\rho_x}{(1+\rho_x^2)^{1/2}} = -\cos\theta_1 \ \ \text{at} \ \ x=0, \quad \dfrac{\rho_x}{(1+\rho_x^2)^{1/2}} = \cos\theta_2 \ \ \text{at} \ \ x=d, \\
\partial_x H(\rho) = 0 \ \ \text{at} \ \ x=0,d
\end{cases}
$$

となる．

表面拡散方程式は $\Gamma(t)$ の表面積を表す汎関数の H^{-1}–勾配流であるから，「$\Gamma(t)$ が囲む部分の体積が一定という制約条件のもとで，$\Gamma(t)$ の表面積を最小にする」という変分構造をもつ．体積保存型平均曲率流方程式

$$
V = H - \overline{H}, \quad \overline{H} = \frac{1}{A(\Gamma)} \int_\Gamma H \, dS
$$

は同じ変分構造をもつ勾配流方程式である．ここで，$A(\Gamma)$ は Γ の表面積，dS は面積要素である．これらの方程式に関連する回転面の研究としては以下のようなものがある．

(1) 定常曲面 (平均曲率一定曲面) について

- $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ の場合は，Athanassenas [2] と Vogel [20] によって，変分問題として以下が示された．

  (2 つの) 半球面 : 安定，　円柱 : ある条件下で安定，　アンデュロイド : 不安定.

  円柱の安定性は，$d = \mathrm{dist}(\Pi_1, \Pi_2)$ (Π_1 と Π_2 の間の距離) とし，r を円柱の半径とすると，$r\pi \geq d$ であれば安定となる．(つまり，太った短い円柱が安定.) また近年，Koiso-Palmer [16] によって，非等方的な場合に関する結果が得られている．

- $\theta \neq \dfrac{\pi}{2}$ の場合は，Vogel [21] による結果がある．しかし，この論文では，$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ の場合のような明確な結果は得られていない．非等方的な場合に関する Koiso [15] の論説では，より一般的な設定での研究結果が述べられている．Vogel [21] の結果との比較を含めた検証が必要である．

(2) 幾何学的時間発展方程式に対する挙動について

- Bernoff-Bertozzi-Witelski [5] が Athanassenas [2] と Vogel [20] の結果をもとに，分岐理論と数値解析を用いることで，表面拡散方程式によって動く曲面に対して，不安定な定常曲面であるアンデュロイドから Pinchoff にいたるまでの解析を行っている．しかし，この Pinchoff 現象に対する非線形問題としての数学的な解析は研究途上である．
- 方程式が体積保存型平均曲率流の場合に関して，Athanassenas がある条件下での円柱の漸近安定性 [3] と特異点の挙動 [4] に関して数学的な解析を行っている．前者は Huisken [13] の方法を回転面の場合に適用し，後者は Huisken [12, 13, 14] や Altschuler-Angenent-Giga [1] の方法を体積保存型平均曲率流によって動く回転面の場合に適用している．しかし，体積保存型平均曲率流方程式は 2 階の放物型方程式であるため，最大値原理を利用することができ，それが特異点の挙動の解析において重要な役割を果たしている．表面拡散方程式は 4 階の放物型方程式であるため最大値原理を利用した方法は利用できない．したがって，表面拡散方程式に対する解析においては新たな手法の開発を要する．

以上が幾何学的時間発展方程式に対する回転面の研究の概観である．現状は上記のような論文の検討段階であるが，今後は表面拡散方程式や別の変分構造をもつ Willmore 流方程式のような 4 階の方程式に対して，回転面の挙動の解析を進め，新たな手法の導出を目指していきたい．

References

[1] S. Altschuler, S. B. Angenent, Y. Giga, *Mean curvature flow through singularities for surfaces of rotation*, J. Geom. Anal., 5(1995), no. 3, 293–358.

[2] M. Athanassenas, *A variational problem for constant mean curvature surfaces with free boundary*, J. Reine Angew. Math., 377(1987), 97–107.

[3] M. Athanassenas, *Volume-preserving mean curvature flow of rotationally symmetric surfaces*, Comment. Math. Helv., 72(1997), no. 1, 52–66.

[4] M. Athanassenas, *Behaviour of singularities of the rotationally symmetric, volume-preserving mean curvature flow*, Calc. Var. Partial Differential Equations, 17(2003), no. 1, 1–16.

[5] A. J. Bernoff, A. L. Bertozzi, T. P. Witelski, *Axisymmetric surface diffusion: dynamics and stability of self-similar pinchoff*, J. Statist. Phys., 93(1998), no. 3-4, 725–776.

[6] O. Baconneau and A. Lunardi, *Smooth solutions to a class of free boundary parabolic problems*, Trans. Amer. Math. Soc., 356(2004), no. 3, 987–1005.

[7] G. Da Prato, *Spazi* $\mathcal{L}^{(p,\theta)}(\Omega,\delta)$ *e loro proprietà*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), 69(1965), 383–392.

[8] L. Evans, *Partial Differential Equations*, AMS, 1998.

[9] A. Freire, *Mean curvature motion of graphs with constant contact angle and moving boundaries*, preprint.

[10] M. Geisler, *Morrey-Campanato spaces on manifolds*, Comment. Math. Univ. Carolin., 29(1988), no. 2, 309–318.

[11] M. Giaquinta and G. Modica, *Local existence for quasilinear parabolic systems under nonlinear boundary conditions*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), 149(1987), 41–59.

[12] G. Huisken, *Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres*, J. Differential Geom., 20(1984), no. 1, 237–266.

[13] G. Huisken, *The volume preserving mean curvature flow*, J. Reine Angew. Math., 382(1987), 35–48.

[14] G. Huisken, *Asymptotic behavior for singularities of the mean curvature flow*, J. Differential Geom., 31(1990), no. 1, 285–299.

[15] M. Koiso, *Variational Problems for Anisotropic Surface Energies*, Proceeding of the 34th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, Technical Report no. 141, 2009, 53–63.

[16] M. Koiso and B. Palmer, *Stability of anisotropic capillary surfaces between two parallel planes*, Calc. Var. Partial Differential Equations, 25(2006), no. 3, 275–298.

[17] A. Lunardi, *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems*, Birkhäuser, 1995.

[18] M. Misawa, *Existence of a classical solution for linear parabolic systems of nondivergence form*, Comment. Math. Univ. Carolin., 45(2004), no. 3, 475–482.

[19] W. Schlag, *Schauder and L^p estimates for parabolic systems via Campanato spaces*, Comm. Partial Differential Equations, 21(1996), no. 7-8, 1141–1175.

[20] T. I. Vogel, *Stability of a liquid drop trapped between two parallel planes*, SIAM J. Appl. Math., 47(1987), no. 3, 516–525.

[21] T. I. Vogel, *Stability of a liquid drop trapped between two parallel planes. II. General contact angles*, SIAM J. Appl. Math., 49(1989), no. 4, 1009–1028.