６．ベクトル解析２

本章では主にベクトルの積分について述べる。本講義では、スカラー場およびベクトル場においてベクトル関数の軌跡が描く曲線 C に沿って積分をする線積分のほか、2 重積分、面積分、体積分について解説する。このほかのベクトルの積分として、被積分関数がベクトル関数である場合や、積分変数がベクトル関数である場合の積分についても概説する。

６－１．線積分と 2 重積分

a）スカラー場の線積分

空間における曲線Cに沿った積分を線積分という。CがC上の距離s（弧の長さ）により

$$\boldsymbol{r}(s) = x(s)\boldsymbol{i} + y(s)\boldsymbol{j} + z(s)\boldsymbol{k} \quad (a \le s \le b) \tag{６．１}$$

で示されるとする（C上の$s = a$の点を A、$s = b$の点を B）。

$f(x, y, z)$はCの各点で定義される与えられた関数であって、sの連続な関数とするとき、

$$\int_C f(x, y, z)ds = \int_a^b f\big(x(s), y(s), z(s)\big)ds \tag{６．２}$$

をCに沿った点 A から B までの関数fの線積分という。

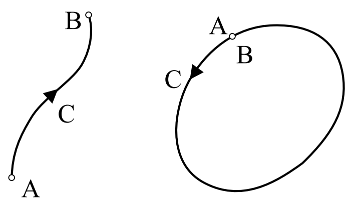

Fig. 6-1 向きづけられた曲線

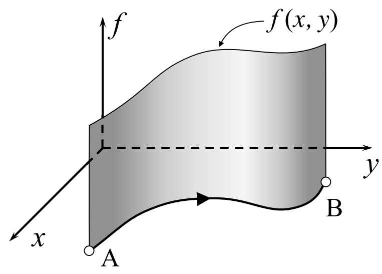

Fig. 6-2 二次元領域($x - y$平面)における線積分

Cが任意のパラメータtにより表わされている場合には、

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k} \quad (t_0 \le t \le t_1)$$

$$\int_C f(x, y, z)ds = \int_{t_0}^{t_1} f\big(x(t), y(t), x(t)\big)\frac{ds}{dt}dt \tag{６．３}$$

ここで、

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

Cに沿った点 A から B までに曲線が$C_1, C_2, \cdots, C_n$の順とすると、関数fの線積分は次式で表される。

$$\int_C f(x, y, z)ds = \int_{C_1} f(x, y, z)ds + \int_{C_2} f(x, y, z)ds + \cdots + \int_{C_n} f(x, y, z)ds \tag{６．４}$$

Cと逆向きの点 B から A まで経路を$-C$とすると、関数fの線積分は次の関係が成り立つ。

$$\int_{-C} f(x, y, z)ds = -\int_C f(x, y, z)ds \tag{６．５}$$

【演習問題】

(6-1)　$\boldsymbol{r}(s) = \cos s\,\boldsymbol{i} + \sin s\,\boldsymbol{j}$ $(0 \le s \le \pi/2)$で表される円弧の上で、$f(x,y) = 2xy^2$を積分せよ。

(6-2)　C が$x-y$平面上の直線 $y = 2x$ を A : (-1, -2, 0)から B : (1, 2, 0)までに区切った線分であるとき、 $\int_C xy^3 ds$ を求めよ。

(6-3)　曲線 $\boldsymbol{r}(t) = \cos t\,\boldsymbol{i} + \sin t\,\boldsymbol{j} + 3t\boldsymbol{k}$ の A : (1, 0, 0)から B : (1, 0, 6π)までの線分における $f(s) = x^2 + y^2 + z^2$ の積分を求めよ。

(6-4)　変化する力$\boldsymbol{p}$がある粒子に作用している場合を考える。粒子が空間に与えられた軌道 C に沿って動かされたとすると、この変位で$\boldsymbol{p}$がした仕事Wは、線積分

$$W = \int_C \boldsymbol{p} \cdot d\boldsymbol{r}$$

で与えられる。今、$\boldsymbol{p} = 4xy\boldsymbol{i} - 8y\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ で示されるベクトル場において、粒子が以下の軌道を通過する場合の仕事量を求めよ。

(a) 直線 $y = 2x,\ z = 2x$ に沿って、(0, 0, 0)から(3, 6, 6)まで

(b) 放物線 $y = (2/3)x^2,\ z = 0$ に沿って、(0, 0, 0)から(3, 6, 0)まで

b） 2 重積分

空間における 2 次元領域（平面）Rにおける積分を２重積分という。閉領域Rが

$$a \le x \le b,\ \ g(x) \le y \le h(x)$$

の形の不等式で記述できるとするとき、次式を閉領域Rにおける$f(x,y)$の２重積分という。

$$\int_R f(x,y)dxdy = \int_a^b \left\{\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy\right\} dx \qquad (6.\ 6)$$

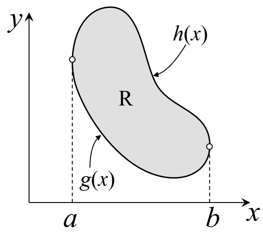

Fig. 6-3 2 重積分の計算

右図（Fig. 6-4）において、領域Rの面積Aは、

$$A = \iint_R dxdy \qquad (6.\ 7)$$

曲面$z = f(x,y)$ (>0)の下方で$x-y$平面における閉領域 R の上方の体積 V は、

$$V = \iint_R f(x,y)dxdy \qquad (6.\ 8)$$

となる。

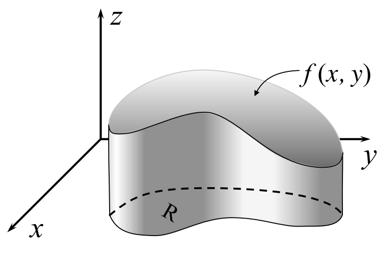

Fig. 6-4

c） ２重積分の変数変換

$x = x(u,v),\ y = y(u,v)$なる新しい変数u, vを導入した場合の２重積分は、

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_{R'} f\big(x(u,v), y(u,v)\big)|J|dudv \qquad (6.\ 9)$$

ここで、Jはヤコブ行列式（ヤコビアン）と呼ばれ、次式で与えられる。

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} \qquad (6.\ 10)$$

変数変換の頻繁な例としては、デカルト座標系から極座標系への変換
$x = r\cos\theta$，　$y = r\sin\theta$ とするとき、

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

となるので、

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_{R'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta \qquad (6.\ 11)$$

【演習問題】

(6-5)　極座標を用いて、$R: x^2 + y^2 \leq 9,\ y \geq 0$ の領域における関数 $f = 2(x+y)$ の積分を求めよ。

(6-6)　極座標を用いて、$R: 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2},\ 0 \leq x \leq 1$ の領域における関数 $f = y^2$ の積分を求めよ。

d）平面におけるグリーンの定理（２重積分－線積分間の変換）

$x - y$平面上に単純閉曲線（自分自身が交わることのない閉曲線）Cで囲まれた領域 R の２つのスカラー場$f(x,y)$と$g(x,y)$に対して、次式が成り立つ（ただし、Cの向きは反時計まわり）。

$$\iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy = \int_C (fdx + gdy) \qquad (6.\ 12)$$

【演習問題】

(6-7) グリーンの定理を用いて、積分路C上の反時計回りの積分$\int_C (fdx + gdy)$ を求めよ。

(a) $f = 3x^2 + y,\ g = 4y^2,\ \ C: (0,0), (1,0), (0,2)$ を頂点とする３角形の境界

(b) $f = 2xy^3,\ g = 3x^2y^2,\ \ C: x^2 + y^2 = 1$

６－２． 面積分

a） 面要素によるスカラー場の面積分

空間スカラー場$f(x,y,z)$の曲面 S における微小面積dA（面要素）による積分を**面積分**とよぶ。

$$\iint_S f(x,y,z)dA \qquad （６．１３）$$

空間スカラー場$f(x,y,z)$に２つのパラメータ（媒介変数）u,vを用いて曲面 S が、

$$\boldsymbol{r}(u,v) = x(u,v)\boldsymbol{i} + y(u,v)\boldsymbol{j} + z(u,v)\boldsymbol{k} \qquad （６．１４）$$

[(u,v)は領域R内を動く点]

で与えられているものとする。

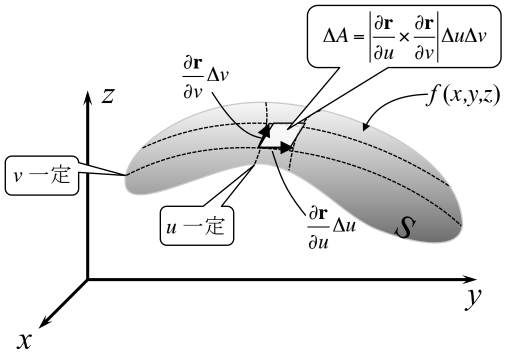

Fig. 6-5

スカラー関数$f(x,y,z)$の曲面Sにおける微小面積要素（面要素） ΔA は、右図（Fig. 6-6）のように２つの微小ベクトル $(\partial\boldsymbol{r}/\partial u)\Delta u$, $(\partial\boldsymbol{r}/\partial v)\Delta v$の外積の大きさに等しい。$\Delta u \to 0, \Delta v \to 0$ とすると、

$$dA = \left\|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right\| dudv \qquad （６．１５）$$

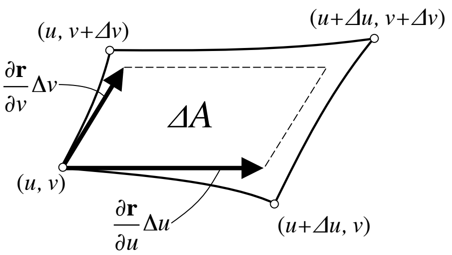

Fig. 6-6

よって、スカラー関数$f(x,y,z)$の曲面Sにおける面要素dAによる面積分は、次のように定義される。

$$\iint_S f(x,y,z)dA = \iint_R f(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) \left\|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right\| dudv \qquad （６．１６）$$

【演習問題】

(6-8)　下記の空間スカラー場fの曲面 S をパラメータ表示（媒介変数表示）して面積分

$\iint_S f(x,y,z)dA$ を求めよ。

(a) $f = x+2$,　S: $x^2+y^2=1$, $0 \le z \le 1$

(b) $f = (x^2+y^2)z$,　S: $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$　$(x^2+y^2 \le a^2)$

b） 面積分－２重積分間の変換

空間スカラー場$f(x,y,z)$の曲面 S が$z=\varphi(x,y)$（(x,y)は領域Rを動く点）で与えられているとき、スカラー関数$f(x,y,z)$の曲面Sにおける面積要素dAによる面積分は、$x-y$平面における平面領域Rの２重積分に変換できる。

$$\iint_S f(x,y,z)dA = \iint_S f\big(x,y,\varphi(x,y)\big)dA$$
$$= \iint_R f(x,y,\varphi(x,y)) \left\|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}\right\| dxdy \qquad （６．１７）$$

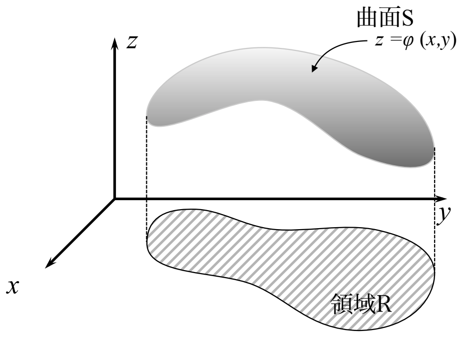

Fig. 6-7

【演習問題】

(6-9)　空間スカラー場 $f = (x^2+y^2)z$であり、半球面Sが$z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$　$(x^2+y^2 \le a^2)$与えられているとき、面積分$\iint_S f(x,y,z)dA$ について極座標変換を用いて求めよ。

６－３．ガウスの発散定理（体積分－面積分間の変換）

閉曲面Sで囲まれた領域Rがベクトル場$\boldsymbol{u}$であるときの体積分と面積分について、

$$\iiint_R div\,\boldsymbol{u}dV = \iint_S \boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{A} \qquad （６．１８）$$

が成り立つ。ここで、VはRの体積、AはSの表面積とし、$d\boldsymbol{A}$は曲面S上の面積要素ベクトルである。

ここで、$\boldsymbol{n}$が曲面Sの単位法線ベクトルであるならば、u_n を曲面SのRに関して外向きの法線ベクトルにおける$\boldsymbol{u}$の成分とすると、

$$u_n = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}$$

であるから、（６．１８）式は以下のように表せる。

$$\iiint_R div\,\boldsymbol{u}dV = \iint_S u_n dA \qquad （６．１９）$$

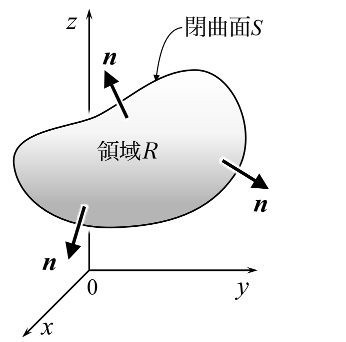

Fig. 6-8 閉領域Rと閉曲面Sの単位法線ベクトル

一般に、ガウスの発散定理の右辺よりも左辺の計算のほうが楽なので、右辺の計算の代わりに左辺を計算するような問題が多い。

【例題６－１】 空間ベクトル場$\boldsymbol{u} = [2xz, 2yz, 0]$ に２つの曲面 $S_1: x^2+y^2+z^2=4\ (z \geq 0)$ と $S_2: x^2+y^2 \leq 4\ (z=0)$ でできる閉曲面 S が与えられている。

このとき、$\iint_S u_n dA$ を求めよ。

（解答）

閉曲面 S は右図のとおりであり、S に囲まれた領域を R とする。

ガウスの発散定理より、$\iint_S u_n dA$ の代わりに $\iiint_R div\,\boldsymbol{u}dV$ を計算する。$div\,\boldsymbol{u} = 4z$ より、次式を計算すればよい。

$$\iint_S u_n dA = \iiint_R (4z)dxdydz \qquad ①$$

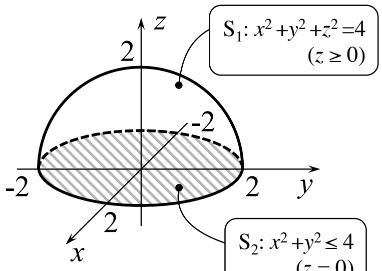

Fig. 6-9

x, y, zの積分範囲は、曲面 S_1 と S_2 の方程式より、

$$0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2},\ -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2},\ -2 \leq x \leq 2$$

よって、式①は以下のように書ける。

$$\iint_S u_n dA = 4\int_{-2}^{2}\left\{\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\left(\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\,dz\right)dy\right\}dx$$

$$= 2\int_{-2}^{2}\left\{\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}(4-x^2-y^2)dy\right\}dx \qquad ②$$

ここで、$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とおいて変数変換（極座標変換）すると、$x-y$平面では、$0 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$ であり、ヤコブ行列式 $J = r$、$4-x^2-y^2 = 4-r^2$ なので、式②は、

$$\iint_S u_n dA = 2\int_0^2\int_0^{2\pi}(4-r^2)r\,dr\,d\theta = \boldsymbol{16\pi}$$

【演習問題】

(6-10)　空間ベクトル場$\boldsymbol{u} = [x, y, z]$ において、3 つの座標平面と平面 $2\mathrm{x} + 2\mathrm{y} + \mathrm{z} - 2 = 0$とで囲まれる領域を$R$とし、$R$を囲む閉曲面を$S$とする。このとき、$\iint_S u_n dA$ を求めよ。

ガウスの発散定理を直感的に理解をするために、以下のような物理現象を考える。
ベクトル場$\boldsymbol{u}$を水の流れとする。ベクトルの発散（div）は，湧き出しや吸い込みを意味するので、定理の左辺の意味は『領域R内全体で、新たに増えたり減ったりする流れの総量』を表わす。今、水の圧縮性を考えていない（非圧縮性流体）ので、もし、湧き出しや吸い込みが全くなければ、領域Rに流入する水量と流出する水量は同じになるはずである（$div\,\boldsymbol{u} = 0$)。もし湧き出しがあれば、流出する水量の方が多くなり（$div\,\boldsymbol{u} > 0$)、吸い込みがあれば流入する水量が多くなる（$div\,\boldsymbol{u} < 0$)。（領域R内にある水道の蛇口か何かによる湧き出し口をイメージしてみよう。）領域R全体での、水量の増減がガウスの発散定理の左辺を意味する。
一方、右辺の中の$\boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{A}$は『この領域$R$の曲面$S$における、$\boldsymbol{u}$の法線方向成分$u_n$』であるので、定理の右辺は『領域の曲面$S$全域に渡る、曲面$S$を通過する流れの総量』を表わす。従って、**ガウスの発散定理**の意味を現象論として記述すると以下のようになる。

（領域全体での増減）= (領域表面で出たり入ったりした量の差)

６－４．ストークスの定理（面積分－線積分間の変換）

a）ベクトル場の線積分（接線線積分）

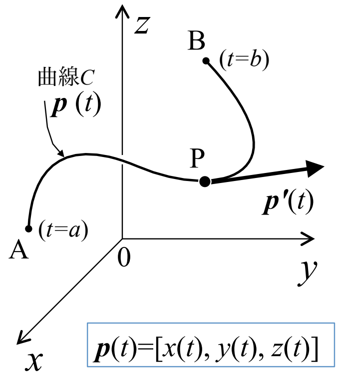

Fig. 6-10 接線線積分

６−１節ではスカラー場の線積分について説明した。ここでは空間ベクトル場の線積分について述べる。（さまざまな線積分が定義できるが、ここでは最も良く使われる**接線線積分**について定義を示す。）

空間ベクトル場：$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{v}(x, y, z) = [f, g, h]$

に、右図のような

曲線C：$\boldsymbol{p}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$　$(a \le t \le b)$

が与えられているとき、$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{P})$と$d\boldsymbol{p}$の内積の曲線$C$に沿った接線線積分と次のように定義する。

$$\int_C \boldsymbol{v}(\boldsymbol{P}) \cdot d\boldsymbol{p} = \int_C (f\,dx + g\,dy + h\,dz) = \int_C f\,dx + \int_C g\,dy + \int_C h\,dz$$

$$= \int_a^b f \frac{dx}{dt} dt + \int_a^b g \frac{dy}{dt} dt + \int_a^b h \frac{dz}{dt} dt \qquad （６．２０）$$

上式は、

$$\int_C \boldsymbol{v}(\boldsymbol{P}) \cdot d\boldsymbol{p} = \int_a^b \boldsymbol{v}(\boldsymbol{P}) \cdot \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} dt = \int_a^b \boldsymbol{v}(\boldsymbol{P}) \cdot \boldsymbol{p}'(t)\,dt \qquad （６．２１）$$

とも表され、$\boldsymbol{p}'(t)$は接線ベクトル$\left[\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right]$であることから、接線線積分と呼ばれる。

ベクトル場の接線線積分においても、スカラー場の積分と同様に次の式が成り立つ。

$$\int_{-C} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{P}) \cdot d\boldsymbol{p} = -\int_C \boldsymbol{v}(\boldsymbol{P}) \cdot d\boldsymbol{p} \quad (C: A \to B, \quad -C: B \to A) \qquad （６．２２）$$

$$\int_C \boldsymbol{v}(\boldsymbol{P}) \cdot d\boldsymbol{p} = \int_{C_1} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{P}) \cdot d\boldsymbol{p} + \int_{C_2} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{P}) \cdot d\boldsymbol{p} + \cdots + \int_{C_n} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{P}) \cdot d\boldsymbol{p} \qquad （６．２３）$$

$$(C = C_1 + C_2 + \ + C_n)$$

【例題６−２】空間ベクトル場$\boldsymbol{v}(x, y, z) = \left[2x, \sqrt{y}, 2z\right]$、曲線$C$: $x = t, y = t^2, z = 1 - t$　$(0 \le t \le 1)$のとき、ベクトル場の（接線）線積分$\int_C \boldsymbol{v}(\boldsymbol{P}) \cdot d\boldsymbol{p}$を求めよ。

（解答）

曲線C：$\boldsymbol{p}(t) = [t, t^2, 1 - t\,]$ $(0 \le t \le 1)$より、求める接線線積分は、

$$\int_C \boldsymbol{v}(\boldsymbol{P}) \cdot d\boldsymbol{p} = \int_C 2x\,dx + \int_C \sqrt{y}\,dy + \int_C 2z\,dz$$

曲線C上のベクトル関数は、

$$\boldsymbol{v}(x, y, z) = \left[2x, \sqrt{y}, 2z\right] = [2t, t, 2(1 - t)]$$

曲線C上に沿った$d\boldsymbol{p}$について

$$\frac{dx}{dt} dt = 1\,dt, \frac{dy}{dt} dt = 2t\,dt, \frac{dz}{dt} dt = -1\,dt$$

であるから、

$$\int_C \boldsymbol{v}(\boldsymbol{P}) \cdot d\boldsymbol{p} = \int_a^b f \frac{dx}{dt} dt + \int_a^b g \frac{dy}{dt} dt + \int_a^b h \frac{dz}{dt} dt$$

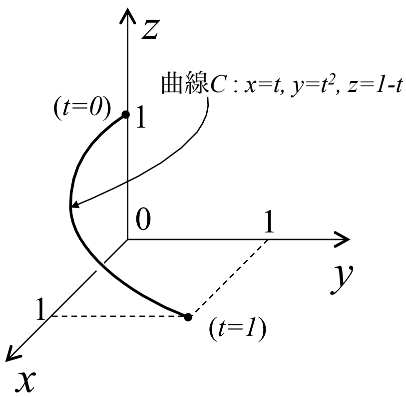

Fig. 6-11

$$= \int_0^1 2t\cdot 1\,dt + \int_0^1 t\cdot 2t\,dt + \int_0^1 2(1-t)\cdot(-1)\,dt = \left[\ t^2\right]_0^1 + \left[\frac{2}{3}t^3\right]_0^1 + \left[2\cdot\frac{1}{2}\left(t^2-t\right)\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3}$$

b） ストークスの定理

ベクトル場$\boldsymbol{v} = [f, g, h]$において閉曲線$C$で囲まれた曲面$S$について、面積分と線積分の関係を表すストークス定理は、以下の公式で与えられる。

$$\iint_S rot\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,dA = \int_C \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{p} \qquad （６．２４）$$

ここで、は、曲面Sの単位法線ベクトル$\boldsymbol{n}$方向の$rot\,\boldsymbol{v}$の成分を$(rot\,\boldsymbol{v})_n$とすると、

$$(rot\,\boldsymbol{v})_n = rot\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$$

また、

$$d\boldsymbol{p} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}\,dt = \boldsymbol{p}'(t)\,dt$$

より、閉曲線Cの接線ベクトル$\boldsymbol{p}'(t)$方向の$\boldsymbol{v}$の成分をv_tとすると

$$\iint_S (rot\,\boldsymbol{v})_n dA = \int_C \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{p}'(t)\,dt = \int_C v_t ds \qquad （６．２５）$$

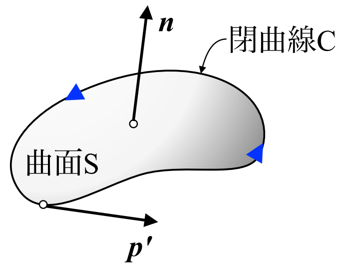

Fig. 6-12 ストークスの定理

左辺はベクトル場$\boldsymbol{v}$の回転と面の法線との内積の面積分であり、右辺はベクトル$\boldsymbol{v}$と接線の内積の線積分であることを意味する。

ストークスの定理の場合、ガウスの発散定理と違って、左辺または右辺のどちらか一方が計算しやすいというわけではない。

ストークスの定理を$x-y$平面で考えれば（ベクトル場を$\boldsymbol{v} = [f, g, 0]$と考える）、平面におけるグリーンの定理が導かれるので、ストークスの定理はグリーンの定理の曲面版と言える。

【例題６−３】Cが原点から見て反時計回りに向きつけられた円 $x^2 + y^2 = 4,\ z = -3$ であって、右手系のデカルト座標系に関して、$\boldsymbol{v} = y\boldsymbol{i} + xz^3\boldsymbol{j} - zy^3\boldsymbol{k}$ であるとき、$\int_C v_t ds$ を求めよ。

（解答）

Cで囲まれた平面 $x^2 + y^2 = 4,\ z = -3$ を S とする。平面Sの法線ベクトル$\boldsymbol{n}$ =**k** なので、

$$(rot\,\boldsymbol{v})_n = (rot\,\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{n} = z^3 - 1$$

であり、$z = -3$ なので、$(rot\,\boldsymbol{v})_n = -28$

したがって、ストークスの定理を用いると、

$$\int_C v_t ds = \iint_S (rot\,\boldsymbol{v})_n dA = -28\iint_S dA = -28\times 4\pi = \boldsymbol{-112\pi}$$

（∵ $\iint_S dA$ は平面Sの面積なので、4π）

【演習問題】

(6-11)　空間ベクトル場$\boldsymbol{u} = [-y, x, 0]$ において、閉曲線C： $x^2 + y^2 = 1\ (z = 0)$とCで囲まれる平面（$x-y$平面上の円板）Sがある。このとき、ストークスの定理の（６．２４）式における左辺および右辺をそれぞれ計算し、一致することを確かめよ。