５．ベクトル解析１

ベクトル解析は、ベクトル値関数の微分積分学を展開する数学の分野の一部であるが、もともとは電磁気学など物理の法則などを表記するために生まれたものである。曲線を表現し解析するために、また力学への応用にも役立つ。スカラー場とベクトル場に関連した物理学的に重要な概念としては、主にベクトル（場）の微分を用いて示される勾配（$grad$）、発散（div）、回転（rot）がある。

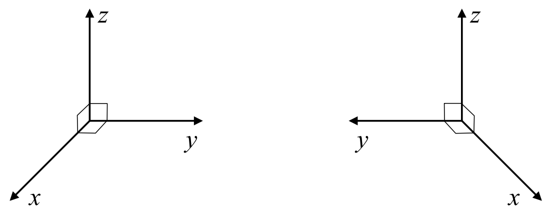
５－０．【復習】ベクトルの基礎

a） 座標系

<u>直交座標系</u>

直交座標系とは、互いに直交している座標軸を指定することによって定まる座標系のことである。3 次元空間の直交座標系は空間内で互いに直交する 3 本の数直線 x軸、 y軸、z軸を決めることによって定められる。平面上の座標の概念を確立したルネ・デカルト（René Descartes）の名をとって<u>デカルト座標系</u>とも呼ぶ。

3 次元空間におけるデカルト座標系が<u>右手系</u>であるとは、右手の親指・人差し指・中指を直交するように曲げたときに、親指をx軸に、人差し指をy軸に、中指をz軸に合わせられることをいう。通常は右手系の直交座標系が用いられることから、右手系を正系とも呼ぶ。



(a) 右手系　　(b) 左手系

Fig. 5-1 デカルト座標系の右手系と左手系

<u>極座標系</u>（平面極座標系， 二次元極座標系, 円座標系）

円上の点を表すのに便利である。直交座標系から極座標系への変換は

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$$

と表すことができる。それぞれの座標系の単位ベクトルの間には次の関係式が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_r \\ \boldsymbol{e}_\theta \end{pmatrix}$$

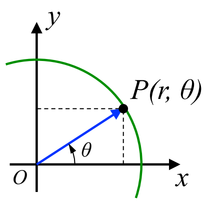


Fig. 5-2 極座標系

<u>球座標系</u>（球面極座標系）

デカルト座標系から球座標系への変換は

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = r\cos\theta$$

と表すことができる。それぞれの座標系の単位ベクトルの間には次の関係式が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\cos\theta \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_r \\ \boldsymbol{e}_\theta \\ \boldsymbol{e}_\varphi \end{pmatrix}$$

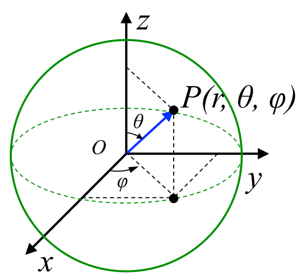


Fig. 5-3 球座標系

b）ベクトルの内積（スカラー積）

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos\gamma$　　（$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$のとき）

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$　　（$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$または$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$のとき）

ここで、γは$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$が同じ始点をもつときにそれらのなす角。

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$　→ 直交（$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$のとき）

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

$\left(\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}\text{のとき}\right)$

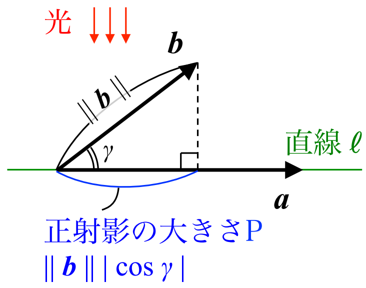


Fig. 5-4 射影

ベクトルの射影

直線ℓ（$\boldsymbol{a}$方向）に垂直に差す光によってベクトル$\boldsymbol{b}$が直線に映す影を射影（正射影）と言い、その大きさPは$\|\boldsymbol{b}\||\cos\gamma|$で表される。

$$P=\frac{\|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{a}\|}=\|\boldsymbol{b}\||\cos\gamma|$$

c）正規直交（正規直行基底）

単位ベクトル　$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1,\cdots\boldsymbol{e}_N\}$について、これらがすべて互いに直交しているとき、正規直交（正規直行基底）と呼ばれる。

例えば、x、y、z方向の単位ベクトルをそれぞれ、$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ とする。$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ は全て方向を持った量である。ベクトルの内積は、平行なベクトルがどれだけあるかを考えるもので、同じ単位ベクトルの積は、

$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$

とする一方、垂直な単位ベクトル（異なる単位ベクトルと）の積は、

$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=0$

とすべてゼロにする。

d）ベクトルの外積（ベクトル積）

二つのベクトル$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$から一つのベクトルをつくる積を定義する。外積またはベクトル積と呼ぶ。

$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$　$\left(\boldsymbol{v}\text{は}\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\text{にともに垂直で、}\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{v}\text{の順で右手系の３つ組を形成する方向}\right)$

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$　$\left(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\text{が同一方向もしくは反対方向、あるいは}\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\text{のうちどちらかが零ベクトル}\right)$

$\|\boldsymbol{v}\|=\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\sin\gamma$　$\left(\boldsymbol{v}\text{の大きさ}=\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\text{を隣接辺とする平行四辺形の面積。}\gamma\text{は}\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\text{のなす角}\right)$

ベクトル積の成分表記

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix}a_3&a_1\\b_3&b_1\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

$$=(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\boldsymbol{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{k}$$

デカルト座標系の右手系で単位ベクトルを考えると、

$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0$ (ベクトルのゼロ)

$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}$　（向きと符号に注意、以下同じ）　$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}$　　$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$

$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k}$　　$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i}$　　$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}$

e) ベクトルの 3 重積

内積と外積を組み合わせた３つのベクトルを 3 重積という。例えば、(i) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$、(ii) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$

や(iii) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$などがある。

(i) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=k$おくと$k\boldsymbol{c}$（←ベクトル$\boldsymbol{c}$の実数倍（スカラー倍））となるだけである。

(ii) $\boxed{\text{スカラー3 重積：}\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})}$

ベクトル$\boldsymbol{a}$とベクトル$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$の内積なので、この結果はスカラー（実数）になる。よって$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$の形の３重積をスカラー三重積という。$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$と表すこともある。

$\boldsymbol{a}=[a_1,a_2,a_3]$、$\boldsymbol{b}=[b_1,b_2,b_3]$、$\boldsymbol{c}=[c_1,c_2,c_3]$のとき、

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}a_1 & a_1 & a_1\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

と計算できる。

さらに次式が成り立つ。

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$$
$$=-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b})=-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})=-(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$$

またスカラー３重積の絶対値$|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})|$は、$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$を３辺にもつ右図（Fig. 5-1）のような平行６面体の体積Vを表す。

$\boxed{\text{平行 6 面体の体積：}V=|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})|}$

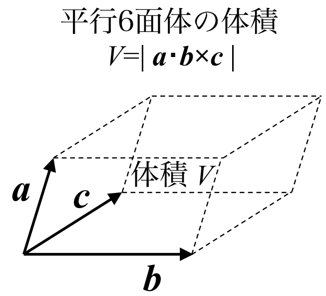


Fig. 5-5 平行６面体の体積と スカラー3 重積

(iii) $\boxed{\text{ベクトル 3 重積：}\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})}$

ベクトル$\boldsymbol{a}$とベクトル$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$の外積なので、この結果はベクトルになる。よって$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$の形の３重積をベクトル三重積という。一般に、$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\neq(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$である。

また、次式が成り立つ。

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$
$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$$

$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$（←ベクトル$\boldsymbol{a}$とスカラー$k=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$の内積!?）や$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$（←ベクトル$\boldsymbol{a}$とスカラー$k=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$の外積!?）は存在しない。

e） 面積ベクトル

右図（Fig. 5-0-5）に示すように空間内にある平面を定める。この平面上に閉曲線Cで囲まれる図形Dとし、その面積をSとする。ここで図に示すように、閉曲線に沿って回る向きを定めたとき、これにより進む右ねじの向きを、この平面の正の向きと呼ぶ。

このとき、平面に垂直で大きさ１の正の向きのベクトルを単位法線ベクトルと呼び、$\boldsymbol{n}$と表すことにする。そしてさらに、この$\boldsymbol{n}$に面積S（スカラー量）をかけたものが面積ベクトル$\boldsymbol{S}$と定義する。

$\boxed{\text{面積ベクトル：}\boldsymbol{S}=S\,\boldsymbol{n}}$

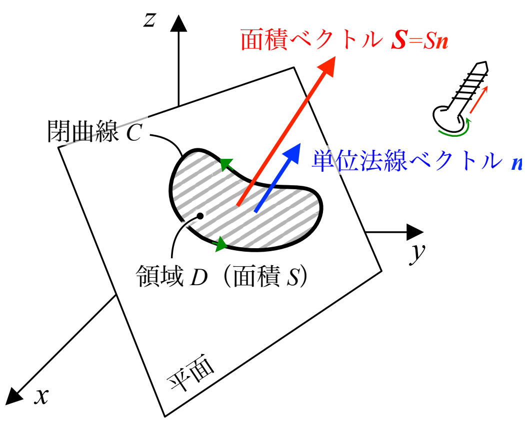


Fig. 5-6

Fig. 5-0-6 に示すように、単位法線ベクトル$\boldsymbol{n}$とx軸、y軸、z軸の正の向きとなす角度をそれぞれα、β、γとおくと、$\boldsymbol{n}$の各成分は次のように方向余弦で表すことができる。

$\boldsymbol{n} = [\cos\alpha\,, \cos\beta\,, \cos\gamma]$

（ここで、$0 \le \alpha \le \pi, 0 \le \beta \le \pi, 0 \le \gamma \le \pi$）

従って、面積ベクトルの成分表示は、

$\boldsymbol{S} = S\,[\cos\alpha\,, \cos\beta\,, \cos\gamma] = [S\cos\alpha\,, S\cos\beta\,, S\cos\gamma]$

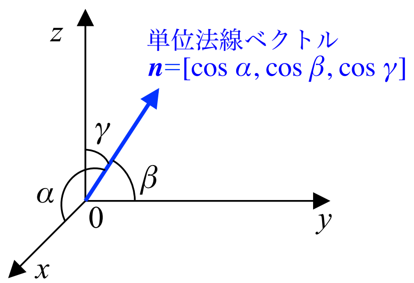


Fig. 5-7　単位法線ベクトルと方向余弦による成分表示

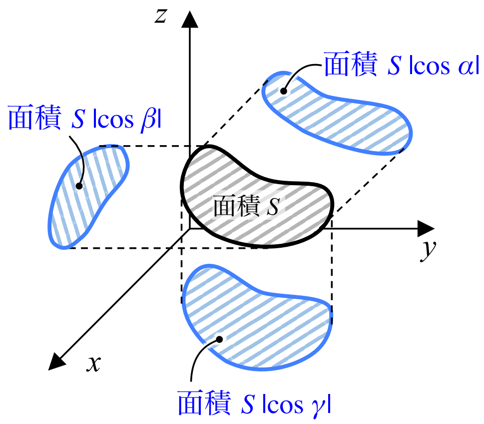


Fig. 5-8　図形Dの正射影とその面積

ここで、

$|\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{S}| = S|\cos\alpha|,\ |\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{S}| = S|\cos\beta|,\ \ |\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{S}| = S|\cos\gamma|$

は、図形Dをそれぞれ$y-z$平面、$z-x$平面、$x-y$平面に正射影したものの面積を表す。

例えば、$\boldsymbol{a}$と$\boldsymbol{b}$の外積$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$は面積ベクトルである。$\boldsymbol{a}$と$\boldsymbol{b}$を 2 辺にもつ平行四辺形を図形$D$とし、図のような回転の向きを与えると、図形$D$に直交し、この平行四辺形の面積をノルム（大きさ）とする正の向きのベクトルが$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$だからである。

例えば、$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \left[-2, 3, -\sqrt{3}\right]$の場合、$\boldsymbol{a}$と$\boldsymbol{b}$を 2 辺にもつ平行四辺形$D$の面積$S$は、

$$S = \|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2}$$

であり、$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \left[-2, 3, -\sqrt{3}\right]$の各成分の絶対値が、この$D$を$y-z$平面、$z-x$平面、$x-y$平面に正射影した図形の面積を表す。

$\left(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \left[-2, 3, -\sqrt{3}\right] = 4[\cos\alpha\,, \cos\beta\,, \cos\gamma]\right)$

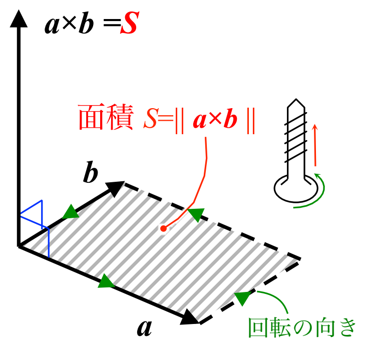


Fig. 5-9　外積と面積ベクトル

５－１．ベクトル関数の微分

a）スカラー関数とベクトル関数

スカラー関数：空間にある領域の各点で定義された関数（座標系の選び方に無関係な実数）

$$f(P) = f(x, y, z) \tag{5.1}$$

ベクトル関数：空間内の点の集合（曲線、曲面、空間領域など）の各点 P にそれぞれベクトル$\boldsymbol{a}(P)$が与えられるときの関数

$$\boldsymbol{a}(P) = \boldsymbol{a}(x, y, z) = a_1(x, y, z)\boldsymbol{i} + a_2(x, y, z)\boldsymbol{j} + a_3(x, y, z)\boldsymbol{k} \tag{5.2}$$

（５．２）式で表される$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$のように複数の独立変数（スカラー）をもつものを多変数ベクトル関数、１つの独立変数をもつ**1 変数ベクトル関数**という。

1 変数ベクトル関数とは、例えばパラメータ（独立変数）tに対して、その従属変数は各成分がtの関数となるベクトルのことで、$\boldsymbol{p}(t)$などと表される。

$$\boldsymbol{p}(t) = [x(t), y(t), z(t)] = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k} \tag{5.3}$$

このパラメータは、媒介変数や助変数とも呼ばれる。

【例題５－１】　図に示すように、空間における剛体 B の回転は角速度ベクトル$\boldsymbol{\omega}$によって記述できる。ここで、$\boldsymbol{\omega}$は回転軸の方向であり、その始点から終点に向かって見た場合に時計回りに回転するようにとる。$\boldsymbol{\omega}$の大きさは回転の角速度 ω、すなわち、剛体 B の 1 点の線速度（接線速度）を回転軸からその点までの距離で割った値に等しい。すなわち、P を B 中の任意の点とし、回転軸から P までの距離をrとすれば、P の速さはωrである。P の位置ベクトルを$\boldsymbol{p} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$とし、z 軸（$\boldsymbol{k}$方向）が回転軸で、$\boldsymbol{\omega}$が正の z 方向を向くように座標系を選んだとき、P の速度ベクトル関数$\boldsymbol{v}$を求めよ。

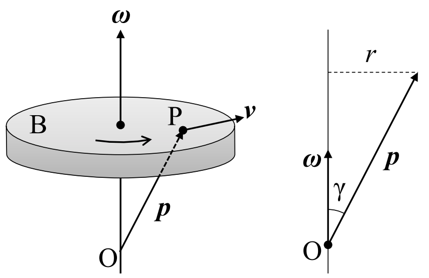


Fig. 5-10

（解法）

$$r = \|\boldsymbol{p}\| \sin\gamma$$

$$\omega r = \|\boldsymbol{\omega}\|\|\boldsymbol{p}\| \sin\gamma = \|\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{p}\|$$

剛体の回転方向を考慮すると、

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{p}$$

ここで、$\boldsymbol{p} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$で、とし、z 軸（$\boldsymbol{k}$方向）が回転軸で、$\boldsymbol{\omega}$が正の z 方向を向くように座標系を選んだので、$\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k}$であるから、

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{p} = \omega\boldsymbol{k}\times(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) = \omega(-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j})$　（ちなみに、成分表記すると$\boldsymbol{v} = [-\omega y, \omega x]$）

b）１変数ベクトル関数の微分

微分の定義：

$$\boldsymbol{p}'(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\boldsymbol{p}(t + \Delta t) - \boldsymbol{p}(t)}{\Delta t} \tag{5.4}$$

デカルト座標系では、$\boldsymbol{p}(t) = [p_1(t), p_2(t), p_3(t)] = p_1(t)\boldsymbol{i} + p_2(t)\boldsymbol{j} + p_3(t)\boldsymbol{k}$　とした場合

$$\boldsymbol{p}'(t) = [p_1{}'(t),\ p_2{}'(t),\ p_3{}'(t)] = p_1{}'(t)\boldsymbol{i} + p_2{}'(t)\boldsymbol{j} + p_3{}'(t)\boldsymbol{k} \tag{5.5}$$

$\boldsymbol{p}'(t)$は、$\dfrac{d\boldsymbol{p}}{dt}$や$\dfrac{d\boldsymbol{p}(t)}{dt}$などと表すこともある。

c）曲線を表すベクトル関数

曲線のパラメータ（媒介変数）表示

座標空間内の曲線 C は、パラメータ（媒介変数、または助変数）を用いて、曲線上の動点 P の原点 0 に関する位置ベクトル

$$\boldsymbol{p}(t) = [x(t), y(t), z(t)] = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k} \qquad （５．３）$$

で表すことが出来る。ここで、位置ベクトルの微分は曲線 C 上の動点 P における接線ベクトルである。

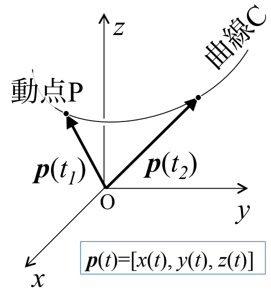


Fig. 5-11　曲線のパラメータ表示

曲線 C の<u>接線</u>：

$$\boldsymbol{p}'(t) = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{p}(t+\Delta t) - \boldsymbol{p}(t)}{\Delta t} \qquad （５．６）$$

$$\boldsymbol{p}'(t) = [x'(t), y'(t), z'(t)]$$
$$= x'(t)\boldsymbol{i} + y'(t)\boldsymbol{j} + z'(t)\boldsymbol{k}$$

（$\boldsymbol{p}'(t)$を$\dot{\boldsymbol{p}}(t)$と表すこともある。）

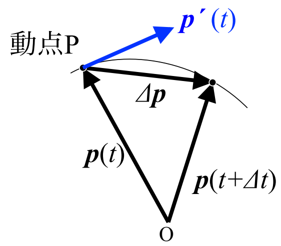


Fig. 5-12　曲線 C の接線（ベクトル関数の微分）

パラメータtに時間という物理的な意味を持たせると接線ベクトル$\boldsymbol{p}'(t)$は、動点 P の時間tにおける速度ベクトル$\boldsymbol{v}(t)$を表す。つまり、速度ベクトル$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{p}'(t)$、速さ$v(t) = \|\boldsymbol{p}'(t)\|$となる。

曲線の長さ

パラメータtが、$t_1 \le t \le t_2$の範囲で変化するとき、動点 P の描く曲線の長さsは、

曲線の<u>長さ</u>：
（弧の長さ）

$$s(t) = \int_{t_1}^{t_2} \|\boldsymbol{p}'(t)\|\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt \qquad （５．７）$$

sはtの関数であるが、tに換わるパラメータとなりうる。（５．７）式は、物理的には「速度を積分したら（移動した）距離になる」ことを意味しており、sを**弧長パラメータ**ともいう。

曲線 C 上を移動する動点 P の速度ベクトルの大きさ：

$$\|\boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{p}'(t)\| = \frac{ds}{dt} \qquad （５．８）$$

【演習問題】

(5-1)　$x - y$平面上で原点 O を中心に半径Rを描きながら反時計周りに角周波数ωで等速回転する粒子 P の速度ベクトルおよび加速度ベクトルを示せ。

(5-2)　次の関数をパラメータ表示で示せ。

(a) $x^2 + y^2 = 1,\ z = x^2$　　　(b) $y = x^2,\ z = x^3$

(5-3)　式（５．７）を用いて、半径aの円の円周の長さを求めよ。

(5-4)　円らせん $\boldsymbol{r}(t) = a\cos t\,\boldsymbol{i} + a\sin t\,\boldsymbol{j} + ct\boldsymbol{k}$　において、(a, 0, 0)から(a, 0, 2πc)までの長さを求めよ。

５－２．スカラー場とベクトル場の微分：勾配、発散、回転

a）スカラー場とベクトル場

スカラー場：平面または空間領域$\boldsymbol{D}$（定義域$\boldsymbol{D}$）の各点Pにおいて、それぞれスカラー$f(P)$が与えられる領域
例）温度場 $T(x,y,z)$、圧力場 $p(x,y,z)$

ベクトル場：平面または空間領域$\boldsymbol{D}$（定義域$\boldsymbol{D}$）の各点Pにおいて、それぞれベクトル$\boldsymbol{a}(P)$が与えられる領域
例）電場 $\mathbf{E}(x,y,z)$、磁場 $\mathbf{B}(x,y,z)$ 、
流束場 $\boldsymbol{v}(x,y,z)$

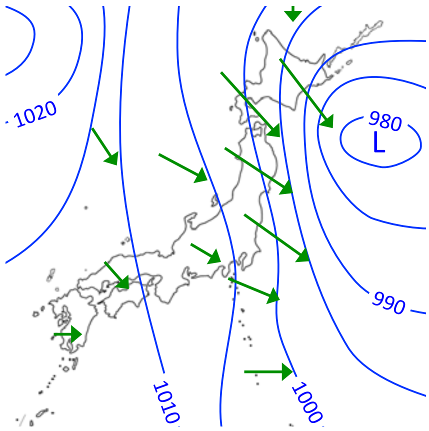


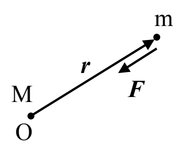
Fig. 5-13　気圧（スカラー場）と風向き（ベクトル場）

場とは？）物理量が空間の各点ごとに決まり、空間分布を持っているものを場と呼ぶ。

上の例のように、スカラー量、ベクトル量が時間に依存しない場のことを、**定常場**と呼ぶ。実際には温度分布は時々刻々変化していくもので、物理量が空間座標だけではなく、時刻 t にも依存し$f(x,y,z,t)$、$\boldsymbol{a}(x,y,z,t)$と表されるような場合を、**非定常場**と呼ぶことがある。

【例題５－２】　重力場は典型的なベクトル場である。質量 Mおよび mの２質点間の距離をr、万有引力定数を Gとすれば、その質点間に働く引力の大きさは

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$



で与えられる。この場合の重力ベクトル関数$\boldsymbol{F}$を求めよ。

（解法）

質点Mの座標を原点 O とすると、$M \to m$のベクトルは$\boldsymbol{r}$、重力ベクトル$\boldsymbol{F}$は$\boldsymbol{r}$の逆向きである。

$$\|\boldsymbol{F}\| = \frac{GMm}{r^2}$$

$$\boldsymbol{F} = \|\boldsymbol{F}\|\frac{-\boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|} = -\frac{GMm}{r^3}\boldsymbol{r}$$

b）スカラー場の勾配

<u>勾配（ $grad$ ）</u>

微分可能な空間のスカラー関数を$f(x,y,z)$とする。関数fはx,y,z方向にそれぞれ勾配を持つ。この３つの勾配を成分とするベクトルを$grad\ f$と定義する。

$$grad\ f = \left[\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right] = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k} \qquad （５．９）$$

$grad\ f$は、関数fの勾配と呼ばれ、微分演算（ハミルトン演算子）子∇（ナブラ）を用いて

$$grad\ f = \nabla f \qquad \left(\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) \qquad （５．１０）$$

と表記される。

方向微分係数

位置ベクトル$\boldsymbol{p}$で定義される点 P を起点として、単位ベクトル$\boldsymbol{e_q}$（$\|\boldsymbol{e_q}\| = \mathbf{1}$）によって方向が与えられる半直線 C を考える。半直線 C 上の点$Q(x(s), y(s), z(s))$の位置ベクトルを$\boldsymbol{r}(s)$と定義すると、

$$\boldsymbol{r}(s) = x(s)\boldsymbol{i} + y(s)\boldsymbol{j} + z(s)\boldsymbol{k} = \boldsymbol{p} + s\boldsymbol{e_q} \qquad （５．１１）$$

となる（ここで、s は線分 PQ の長さ）。

半直線 C に沿った関数fの微分は、次式で与えられる。

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}x' + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial z}z' \qquad （５．１２）$$

式（５．１１）より、

$$\boldsymbol{r}' = x'\boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j} + z'\boldsymbol{k} = \boldsymbol{e_q}$$

となるので、式（５．１２）は次式のようになる。

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \boldsymbol{e_q} \cdot grad\ f \qquad （５．１３）$$

この値は、関数fの勾配（$grad\ f$）の$\boldsymbol{e_q}$方向成分の大きさを示しており、方向微分係数という。

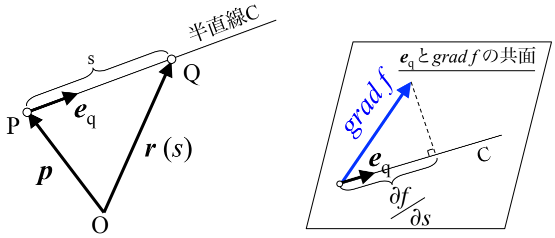


Fig. 5-14

【演習問題】

(5-5)　関数$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z^2$で与えられるスカラー場の勾配ベクトル$grad\ f$を求め、点(1, 2, 3)における$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$方向の方向微分係数を求めよ。

(5-6)　点(2, 1, 3)におけるベクトル(1, -2, 0)方向の関数$f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2$の勾配と方向微分係数を求めよ。

平面スカラー場での$grad\ f$の図形的な意味：

$f(x, y)$で与えられる平面スカラー場での図形的な意味を考えるため、右図のように$f(x, y) = c$ (c: 定数)となる等位曲線（地図における等高線をイメージしてみよう）を考える。点 P_2において、最大傾斜方向を向くベクトル$grad\ f$が接線ベクトル$\boldsymbol{p}'$と直交しているのが分かる。

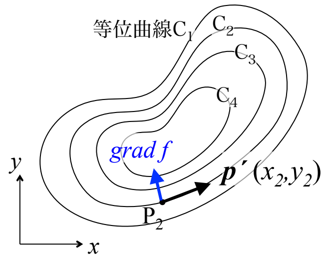


Fig. 5-15　曲面の法線ベクトルとしての勾配

（空間スカラー場における）曲面の法線ベクトル

微分可能な空間にスカラー関数$f(x, y, z)$を考える場合、$f(x, y, z) = c$ (c: 定数)を満足するのは空間中における曲面 S であるとする。今、曲面 S 上に曲線 C($\boldsymbol{r}(s) = x(s)\boldsymbol{i} + y(s)\boldsymbol{j} + z(s)\boldsymbol{k}$)が存在する場合、関数$x(s)$, $y(s)$, $z(s)$は$f\big(x(s), y(s), z(s)\big) = c$を満足するので、これを s について微分すると、

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}x' + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial z}z' = \boldsymbol{r}' \cdot grad\ f = 0 \qquad （５．１４）$$

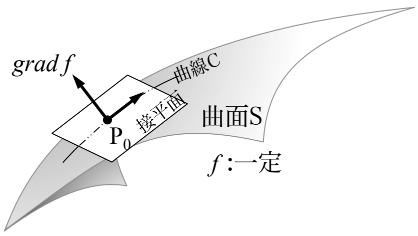


Fig. 5-16　曲面の法線ベクトルとしての勾配

ここで、**r'**は C の接線ベクトルなので、$grad\ f$は曲面 S の法線ベクトルを意味する。

曲面 S の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は、

$$\boldsymbol{n} = \frac{grad\ f}{|grad\ f|} \qquad （５．１５）$$

曲面の接平面： 曲面 S 上の定点 P_0 での接平面を考える。接平面上の任意の点を P とし、点 P_0、P の位置ベクトルを$\boldsymbol{p_0}$、$\boldsymbol{p}$とすると、接平面は次式を満たす。

$$grad\ f \cdot (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p_0}) = 0 \qquad （５．１６）$$

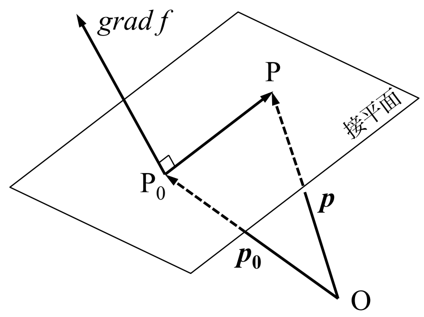


Fig. 5-17

スカラーポテンシャル：

空間ベクトル場$\boldsymbol{f}(x,y,z)$に対して、

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = -\nabla\varphi(x,y,z)$$

を満たす空間スカラー場$\varphi(x,y,z)$が存在するとき、「$\boldsymbol{f}$はスカラーポテンシャルφをもつ」という。

演習問題(5-2)において、重力ベクトル（空間ベクトル場）には、スカラーポテンシャルφが背後にあって、しばしば物理の世界ではこれを重要視する。つまり、太陽からの距離$\boldsymbol{r}$によるポテンシャルφの勾配に従って、ポテンシャルの井戸の中心に向かった万有引力を受けながら、惑星は公転している。

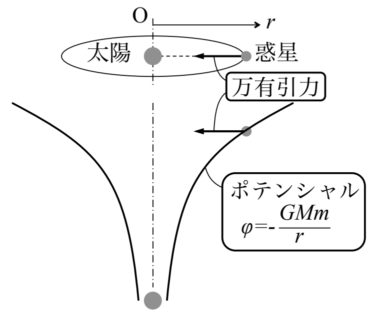


Fig. 5-18 万有引力のスカラーポテンシャル

【演習問題】

(5-7) 放物面$z = x^2 + y^2$上の点(1, 2, 5)における単位法線ベクトルと接平面の方程式を求めよ。

(5-8) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$上の点(3, 4, 0)における単位法線ベクトルと接平面の方程式を求めよ。

c）ベクトル場の発散

デカルト座標において、ベクトル $\boldsymbol{v}(x,y,z) = v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{k}$ を微分可能とすれば、関数

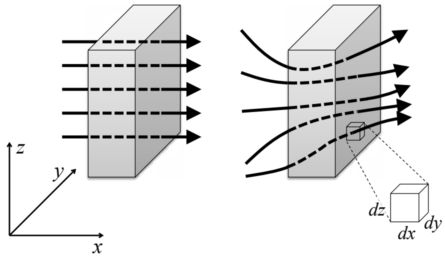
$$div\ \boldsymbol{v} \equiv \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = \nabla \cdot \boldsymbol{v} \qquad （５．１７）$$

を $\boldsymbol{v}$ の発散という。

発散の概念：

流れの場（ベクトル場）は左図(a)のように一様なものに限らず、(b)のような流れが実際にある。発散の概念は、ベクトル場における各点（微少体積）における流入と流出の大きさを符号付きスカラーの形で表すことができる要素である。

x軸の方向を正とする流れを考え、微少空間（体積dV）に斜線で示した左側の面から右側の面へ、それぞれ流入量と流出量を考える。このとき、v_xは



(a)一様な流れ (b)一様でない流れ

Fig. 5-19 流れ場（ベクトル場）

x方向の単位面積当たりの流れ（流束）とすると、

$$\left(\text{流入量}\right)_x = v_x(a,b,c)\cdot dydz$$

$$\left(\text{流出量}\right)_x = v_x(a+dx,b,c)\cdot dydz$$

微少空間におけるx方向への流入と流出の収支である変化量は、

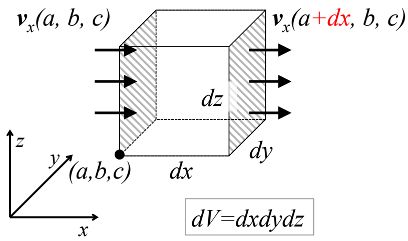


Fig. 5-20　微少空間の流れの変化量（x軸方向）

$$\left(\text{変化量}\right)_x = \{v_x(a+dx,b,c) - v_x(a,b,c)\}\,dydz$$

$$= \left\{\frac{v_x(a+dx,b,c) - v_x(a,b,c)}{dx}dx\right\}\,dydz$$

$$= \left\{\frac{\partial v_1}{\partial x}dx\right\}\,dydz$$

同様に、y方向、z方向への変化量は、

$$\left(\text{変化量}\right)_y = \left\{\frac{\partial v_2}{\partial y}dy\right\}\,dxdz\text{、}\quad \left(\text{変化量}\right)_z = \left\{\frac{\partial v_2}{\partial z}dz\right\}\,dxdy$$

従って、微少空間全体の変化量は、

$$\left(\text{変化量}\right)_V = \left\{\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\right\}\,dxdydz$$

$$= \left\{\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\cdot(v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{k})\right\}\,dxdydz$$

$$= (\nabla\cdot\boldsymbol{v})dV$$

微小体積において、流出する量と流入する量との差を表す物理量が発散の概念である。

従って、発散（スカラー）が正ならば、場が対象領域から外部に流出（わき出し）、負ならば、場が外部から対象領域に流入（吸い込み）を意味する。例えば、放射性物質から広がる放射線や点電荷から周りに出る電気力線などを表現できる。

$f(x,y,z)$が 2 回微分可能なスカラー関数であれば、

$$div(grad\ f) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \nabla^2 f = \Delta f \qquad (5.\ 18)$$

が与えられる。この式はスカラー関数fのラプラシアンであり、Δはラプラス演算子と呼ばれる。

d）ベクトル場の回転

デカルト座標において、ベクトル $\boldsymbol{v}(x,y,z) = v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{k}$ を微分可能とすれば、ベクトル関数

$$rot\ \boldsymbol{v} \equiv \nabla\times\boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} \qquad (5.\ 19)$$

を$\boldsymbol{v}$の回転という。回転はベクトル場の各点における回転を示すベクトル（回転軸ベクトルの向きと回転の大きさ）であり、電磁場の記述に頻繁に利用されている。

平面ベクトル場（2 次元）では、以下のように表される。

$$rot\ \boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} \qquad （５．２０）$$

【演習問題】

(5-9)　次式で示されるベクトル関数の発散と回転を求めよ。

(a)　$\boldsymbol{v} = y\boldsymbol{i} + 2x\boldsymbol{j}$

(b)　$\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} - (x^2 + z^2)\boldsymbol{k}$

(c)　$\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i} + 3xy\boldsymbol{j}$