４．ラプラス変換

４－１．ラプラス変換

フーリエ解析では、変数が-∞から∞の領域を対象とするので、初期値を扱う場合には最適とは言えない。理工学では、振動、電気回路、制御などの領域で初期値を有する微分方程式がよく使われる。このような線形微分方程式を解くための道具としてラプラス変換は有効である。

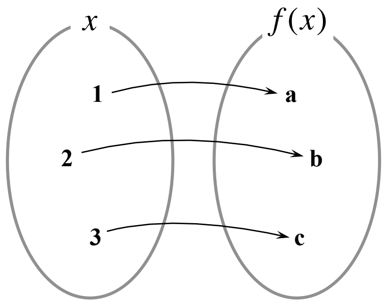


Fig. 4-1　１価関数写像のイメージ

関数$f(t)$を実変数tの全ての正の値に対して定義された１価の関数（1 価関数：１つの変数に対して関数値がただ一つ決まるもの→Fig. 4-1）とする。また、sをtに無関係な複素数としたとき、

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt \qquad (4.\ 1)$$

を<u>ラプラス変換</u>という。

ここで、$f(t)$：原関数、$F(s)$：像関数、e^{-st}：ラプラス変換の核

ただし、$F(s)=\infty$を与えるような$f(t)$には適用できない。（$F(s)$が収束するようsを制限）

ラプラス変換は、元はといえば線形微分方程式を解くテクニックとして発達し、後から理論体系ができたという経緯を持っている。詳細は４−３節で述べるが、<u>ラプラス変換の結果を直接利用するのではなく、変換して問題を解き、その答を逆変換で元の世界に引き戻すという使い方</u>が主である。

【例題４−１】　次の原関数$f(t)$に対応する像関数$F(s)$を求めよ。

（解法）

(i)　$f_1(t)=1$のとき

$$F_1(s) = \mathcal{L}[1] = \int_0^\infty 1\cdot e^{-st}\,dt = \left[\frac{1}{-s}e^{-st}\right]_0^\infty = \frac{1}{s}\ (s>0)$$

［もし$s \le 0$ならば、無限積分$\int_0^\infty e^{-st}\,dt$は発散して、$F_1(s)$は存在しないことになる。このために$s>0$の制限（$s$の定義域）が必要となる。］

(ii)　$f_2(t)=t$のとき

$$F_2(s) = \mathcal{L}[t] = \int_0^\infty t\cdot e^{-st}\,dt$$

$$= \int_0^\infty t\cdot\left(\frac{1}{-s}e^{-st}\right)' dt$$

$$= \left[\frac{1}{-s}te^{-st}\right]_0^\infty - \int_0^\infty 1\cdot\frac{1}{-s}e^{-st}\,dt$$

$$= -\frac{1}{s}\left(\left\{\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t}{e^{st}}\right)\right\} - 0\right) - \left[\frac{1}{s^2}te^{-st}\right]_0^\infty$$

$$= 0 - \frac{1}{s^2}(0-1) = \frac{1}{s^2}\ \ (s>0)$$

部分積分の公式

$$\int f\cdot g' dt = f\cdot g - \int f'\cdot g\,dt$$

分母、分子をtで微分

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t}{e^{st}}\right) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{se^{st}}\right) = 0$$

（ロピタルの定理）

(iii) $f_3(t)=\sin t$のとき

$$F_3(s)=\mathcal{L}[\sin t]=\int_0^\infty \sin t\cdot e^{-st}\,dt=\int_0^\infty \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\cdot e^{-st}\,dt$$

$$=\frac{1}{2i}\left\{\int_0^\infty e^{-(s-i)t}dt-\int_0^\infty e^{-(s+i)t}dt\right\}$$

$$=\frac{1}{2i}\left\{\left[\frac{1}{-(s-i)}e^{-(s-i)t}\right]_0^\infty-\left[\frac{1}{-(s+i)}e^{-(s+i)t}\right]_0^\infty\right\}$$

第１項：$Re(s-i)\geq 0$のとき収束→$Re(s)\geq 0$

第２項：$Re(s+i)\geq 0$のとき収束→$Re(s)\geq 0$

従って、収束の条件：$Re(s)\geq 0$

$$F_3(s)=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-i}-\frac{1}{s+i}\right)=\frac{1}{s^2+1}$$

原関数$f(t)$と像関数$F(s)$の各要素の間に１対１の対応関係があるとすると（１価関数）、$F(s)$から$f(t)$への逆変換も考えることができる。これを<u>ラプラス逆変換</u>と呼び、<u>$\boldsymbol{\mathcal{L}^{-1}[F(s)]}$</u>と表す。
従って、以下のように表すことができる。

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]=1,\qquad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]=t,\qquad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]=\sin t$$

ラプラス逆変換は余誤差関数を用いて計算されるが、一般に逆変換はラプラス変換の公式を利用することが多いので、本講義ではラプラス逆変換の式の中身については触れない。

【例題４－２】 $n=0,1,2,\cdots$のとき、

$\mathcal{L}[t^n]=\dfrac{n!}{s^{n+1}}$ $(s>0)$が成り立つことを、数学的帰納法により証明せよ。

（解法）

(i) $n=0$のとき

$$\mathcal{L}[1]=\int_0^\infty 1\cdot e^{-st}\,dt=\left[\frac{1}{-s}e^{-st}\right]_0^\infty=\frac{1}{s}=\frac{0!}{s^{0+1}}$$

(i) $n=k$ $(k=0,1,2,\cdots)$のとき

$\mathcal{L}[t^k]=\dfrac{k!}{s^{k+1}}$ $\cdots$① が成り立つと仮定すると、

$n=k+1$のときについて考える。ラプラス変換の定義式より

$$\mathcal{L}[t^{k+1}]=\int_0^\infty t^{k+1}\cdot e^{-st}\,dt=\int_0^\infty t^{k+1}\left(\frac{1}{-s}e^{-st}\right)'dt=\left[\frac{-1}{s}t^{k+1}e^{-st}\right]_0^\infty+\frac{1}{s}\int_0^\infty (k+1)t^ke^{-st}\,dt$$

$$=\frac{-1}{s}\left(\lim_{t\to\infty}\frac{t^{k+1}}{e^{st}}-0\right)+\frac{k+1}{s}\int_0^\infty t^ke^{-st}\,dt$$

$$\left[\quad \lim_{t\to\infty}\frac{t^{k+1}}{e^{st}}=\lim_{t\to\infty}\frac{(k+1)t^k}{se^{st}}=\cdots=\lim_{t\to\infty}\frac{(k+1)!}{s^{k+1}e^{st}}=\frac{(k+1)!}{s^{k+1}}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^{st}}=0\quad\right]$$

ロピタルの定理より、分母と分子をtで$k+1$回微分した。

よって、

$$\mathcal{L}[t^{k+1}]=\frac{k+1}{s}\int_0^\infty t^ke^{-st}\,dt=\frac{k+1}{s}\mathcal{L}[t^k]$$

①の仮定より、

$$\mathcal{L}[t^{k+1}] = \frac{k+1}{s}\frac{k!}{s^{k+1}} = \frac{(k+1)!}{s^{(k+1)+1}} \qquad \therefore n = k+1 \text{ のときも成り立つ。}$$

以上(i)、(ii)より、数学的帰納法により$n = 0, 1, 2, \cdots$のとき、

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (s > 0)\text{が成り立つ。}$$

（証明終わり）

【演習問題】

(4-1)　原関数を$f(t) = \cos at$とした場合の像関数$F(s)$を求めよ。ただし、aは定数とする。

(4-2)　ヘビサイド関数$u(t)$のラプラス変換を求めよ。

(4-3)　デルタ関数$\delta(t)$のラプラス変換を求めよ。

【復習】ロピタル（l’Hospital）の定理

関数$f(x)$と$g(x)$が点$x = a$の近傍で微分可能で、

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0, \lim_{x\to a} g(x) = 0 \quad \text{または} \quad \lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty, \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$$

であるとする。このとき、$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A$が存在すれば、

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

が成り立つ。

表４−１．　代表的な式のラプラス変換表

	$f(t)$	$F(s)$
(1)	$\delta(t)$	1
(2)	$u(t)$	$\dfrac{1}{s}$
(3)	t	$\dfrac{1}{s^2}$
(4)	$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\dfrac{1}{s^n}$
(5)	$t^{-\frac{1}{2}}$	$\pi^{\frac{1}{2}}s^{-\frac{1}{2}}$
(6)	e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
(7)	te^{at}	$\dfrac{1}{(s-a)^2}$
(8)	$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}$	$\dfrac{1}{(s-a)^n}$
(9)	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\exp\left[-\dfrac{k^2}{4t}\right]$	$\dfrac{1}{s}\exp\left(-k\sqrt{s}\right)$
(10)	$t^{-\frac{3}{2}}\exp\left[-\dfrac{k^2}{4t}\right]$	$\dfrac{2}{\sqrt{k}}\sqrt{\pi}\exp\left(-k\sqrt{s}\right)$
(11)	$[\lambda+(\mu-a\lambda)t]e^{at}$	$\lambda s+\mu[s+a]^2$
(12)	$\dfrac{1}{r}e^{-bt}\sin rt$	$\dfrac{1}{s^2+2bs+c}\quad\left(r=\sqrt{c-b^2}\right)$
(13)	$e^{-bt}\left(\cos rt-\dfrac{b}{r}\sin rt\right)$	$\dfrac{s}{s^2+2bs+c}\quad\left(r=\sqrt{c-b^2}\right)$
(14)	$\dfrac{1}{a}\sin at$	$\dfrac{1}{s^2+a^2}$
(15)	$\cos at$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$
(16)	$\dfrac{1}{a}\sinh at$	$\dfrac{1}{s^2-a^2}$
(17)	$\cosh at$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$
(18)	$e^{bt}\sin at$	$\dfrac{a}{(s-a)^2+a^2}$
(19)	$e^{bt}\cos at$	$\dfrac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$

４－２．ラプラス変換の性質

掛け算・割り算は対数（log）によって、足し算・引き算になった。ラプラス変換法はこれと似ており、微分・積分をラプラス変換により掛け算・割り算にするものである。微分方程式を代数方程式の問題とすることができ、以下に述べるラプラス変換の性質を適宜に利用することで、より簡便に解を得ることが可能となる。

(a) 線形性

$$\mathcal{L}[\sum_i a_i f_i(t)] = \sum_i a_i F_i(s) \qquad （４．２）$$

ラプラス変換は線形性を持ち、従って特に重ね合わせの原理（後述）を用いて計算することが可能である。例えば、ラプラス変換が線形性を持つとは、任意の関数 $f(t), g(t)$ に対して

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = aF(s) + bG(s)$$

が成り立つ。したがって、与えられた関数を部分分数分解できるとき、各因子がラプラス変換の公式表にあるものに合致すれば、その変換が求められる。

(b) 移動

$$\mathcal{L}[f(t-a)] = e^{-sa}F(s) \qquad （４．３）$$

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a) \qquad （４．３’）$$

（４．３の証明）　$\mathcal{L}[f(t-a)] = \int_0^\infty f(t-a)e^{-st}\,dt$

$t-a=\tau$とすると、$t=\tau+a,\ dt=d\tau$

$$\mathcal{L}[f(\tau)] = \int_0^\infty f(\tau)e^{-s(\tau+a)}\,d\tau = e^{-sa}\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau = e^{-sa}F(s)$$

（４．３’証明）　$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = \int_0^\infty e^{at}f(t)e^{-st}\,dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(s-a)t}\,dt = F(s-a)$

(c) 拡大（相似性）

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \qquad （４．４）$$

（証明）　$\mathcal{L}[f(at)] = \int_0^\infty f(at)e^{-st}\,dt$

$at=\tau$とすると、$t=\frac{\tau}{a},\qquad dt=\frac{1}{a}d\tau$

$$\mathcal{L}[f(\tau)] = \int_0^\infty f(\tau)e^{-\frac{s}{a}\tau}\frac{1}{a}d\tau = \frac{1}{a}\int_0^\infty f(\tau)e^{-\frac{s}{a}\tau}\,d\tau = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

(d) 微分

$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$のとき、

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt}e^{-st}dt = [f(t)e^{-st}]_0^\infty + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = -f(0) + sF(s)$$

時間tに関する導関数のラプラス変換は多項式の差となって現れる。一階の導関数をラプラス変換すると$f(0)$が現れ、二階導関数の場合は$f(0)$に加え、$t=0$における微分係数$f'(0)$が現れる。

これを繰り返すと、一般のn階の導関数のラプラス変換は以下のようになる。

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) \qquad （４．５）$$

$f(0), f'(0), \cdots, f^{(n-1)}(0)$：ラプラス変換の原関数の初期値（$t = 0$での値）を表す。

（ちなみに、$f(\infty)$はラプラス変換の原関数の最終値（$t \to \infty$における極限値）と言う。）

特に、$f'(t)$および$f''(t)$のラプラス変換の式

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$

以上の式は良く使うので、（４．５）式と併せてこのまま覚えておいてもよい。

(e) コンボルージョン（convolution; たたみこみ）

たたみこみ（合成積）定理： 関数のたたみこみ（合成積）はラプラス変換で積（値ごとの積）に移される。

$$\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = \mathcal{L}[f_2(t) * f_1(t)] = F_1(s) F_2(s) \qquad （４．６）$$

ただし、$\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s)$、$\mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(s)$　とする。

(f) 積分

$f(t)$の積分を　$f_s(t) = \int_a^t f(t)dt$　とし、$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$　とおくと、

微分定理より、　$\mathcal{L}\left[\frac{df_s}{dt}\right] = sF_s(s) - f_s(0) = F(s)$

$$\mathcal{L}[f_s(t)] = F_s(s) = \frac{1}{s}F(s) + \frac{1}{s}f_s(0) \qquad （４．７）$$

$F_s(s)$は$f(t)$の積分における原関数のラプラス変換であり、$f_s(0)$は$f(t)$の積分の原関数で$t = 0$の値である。

(g) ヘビサイド展開定理

像関数が$F_s(s) = \frac{g_m(s)}{g_n(s)}$　（ここで、$g_i(s)$はsに関するi次の整式。$n > m$）で与えられる場合、以下に示す$\mathrm{g_n(s)}$の因数分解の関係から

$$g_n(s) = (s - a_1)(s - a_2) \cdots (s - a_n)$$

の形にして、以下のように部分分数に展開できる。

$$F_s(s) = \frac{b_1}{s - a_1} + \frac{b_2}{s - a_2} + \cdots + \frac{b_n}{s - a_n}$$　となるので、各項を逆変換すれば、

$$f(t) = b_1\, exp(a_1 t) + b_2\, exp(a_2 t) + \cdots + b_n\, exp(a_n t) \qquad （４．８）$$

【演習問題】（ラプラス逆変換）

(4-5)　$F(s) = \frac{1}{s^2(s-1)}$　の原関数を求めよ。

(4-6)　$F(s) = \frac{s}{(s-1)^3}$　の原関数を求めよ。

４－３．ラプラス変換の微分方程式への応用（重要）

ラプラス変換やラプラス逆変換を利用することによって、常微分方程式や偏微分方程式などを、その境界条件や初期条件も含めて、微分方程式の解を積分計算なしに、簡便に求めることができる場合がある。

【例題４－３】　次の微分方程式をそれぞれの初期値のもとで解け。

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2}+\omega^2 f(t)=0\text{，初期値：}\frac{df(0)}{dt}=0\text{，}f(0)=2$$

ここで、ラプラス変換の公式$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+\omega^2}\right]=\cos\omega t$が与えられているとする。

（解法 ｉ）　ラプラス変換を使わない解法

２階定数係数線形微分方程式より、

この解は$f(t)=e^{\lambda t}$（λ：定数）の形式となる。

従って、$f'(t)=\lambda e^{\lambda t}, f''(t)=\lambda^2 e^{\lambda t}$となる。

これらを与えられた微分方程式に代入して、

$$\lambda^2 e^{\lambda t}+\omega^2 e^{\lambda t}=0$$

$e^{\lambda t}>0$より、両辺を$e^{\lambda t}$で割ると、

$$\lambda^2+\omega^2=0 \qquad \therefore\ \lambda=\pm i\omega$$

これより微分方程式の一般解は、

$$\begin{aligned} f(t)&=A_1e^{i\omega t}+A_2e^{-i\omega t}\\ &=A_1(\cos\omega t+i\sin\omega t)\\ &\qquad +A_2(\cos\omega t-i\sin\omega t)\\ &=(A_1+A_2)\cos\omega t+(A_1-A_2)i\sin\omega t \end{aligned}$$

ここで、$C_1=(A_1+A_2), C_2=(A_1-A_2)i$

$$f(t)=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t\quad\{C_1,C_2\text{：任意定数}\}$$

両辺をtで微分して、

$$f'(t)=-C_1\omega\sin\omega t+C_2\omega\cos\omega t$$

初期値より、

$$f(0)=C_1\cos 0+C_2\sin 0=C_1=2$$

$$f'(0)=-C_1\omega\sin 0+C_2\omega\cos 0=C_2\omega=0$$

$\omega\neq 0$より、$C_2=0$

よって、

$$f(t)=2\cos\omega t$$

（解法 ｉｉ）　ラプラス変換を使った解法

微分方程式の両辺をラプラス変換すると、

$$\mathcal{L}[f''(t)+\omega^2 f(t)]=\mathcal{L}[0]$$

$$\left[\quad \mathcal{L}[0]=\int_0^\infty 0\cdot f(t)e^{-st}\,dt=0 \quad\right]$$

ラプラス変換の線形性より、

$$\mathcal{L}[f''(t)]+\omega^2\mathcal{L}[f(t)]=0$$

ラプラス変換の微分の公式より、

$$\mathcal{L}[f''(t)]=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$$

従って、

$$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)+\omega^2F(s)=0$$

初期値：$f(0)=2, f'(0)=0$を代入すると、

$$(s^2+\omega^2)F(s)=2s$$

$\left[\begin{array}{l} f(t)\text{の微分方程式から、その像関数}\\ F(s)\text{の１次関数になったことに注目} \end{array}\right]$

$$\therefore F(s)=\frac{2s}{s^2+\omega^2}$$

両辺をラプラス逆変換して、

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s}{s^2+\omega^2}\right]=2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+\omega^2}\right]$$

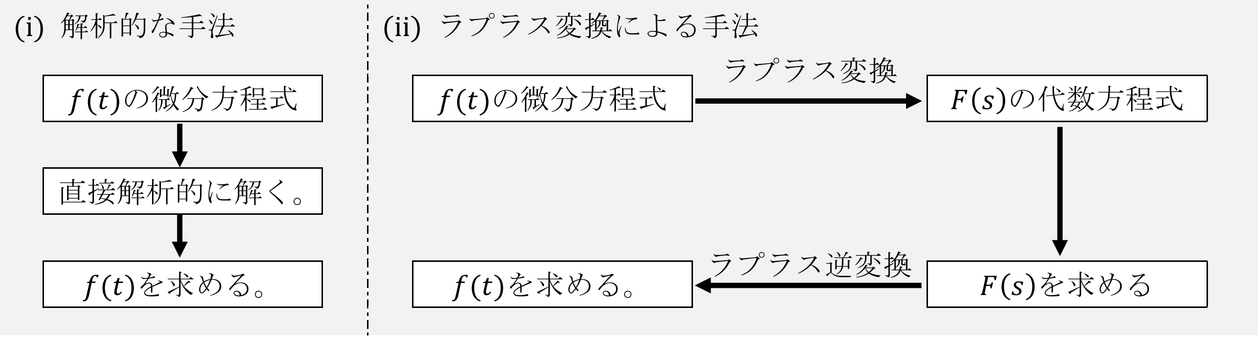
与えられたラプラス変換の公式を使って、$f(t)$を求めると、

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=2\cos\omega t$$

微分方程式の解法について、(解法 i) は直接解析的に解く手法であり、これに対して、(解法 ii) は微分方程式をラプラス変換により$F(s)$の代数方程式（１次方程式）に持ち込んで、これから像関数$F(s)$を求め、これをさらにラプラス逆変換して関数$f(t)$を求める手法である（表 4-1）。

例題４－３のような簡単な問題では、この２つの解法の手間の差ははっきりしないが、複雑で本格的な微分方程式になればなるほど、積分計算などを行って直接、解析的に微分方程式を解く作業は大変となる。これに対してラプラス変換と逆変換を利用する解法では、その計算量を大幅に減らすことができるようになる。

表 4-1 微分方程式の解法



ラプラス変換の微分：

$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$のとき、

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^{(n)}f(t)}{dt^{(n)}}\right] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) \qquad （４．５）$$

ラプラス変換の微分を用いると、微分方程式を解くのに大変便利である。

【例題４−４】　次の微分方程式をそれぞれの初期値のもとで解け。

$$\frac{d^3f(t)}{dt^3} - \frac{d^2f(t)}{dt^2} - 6\frac{df(t)}{dt} = 0\,,\quad \frac{d^2f(0)}{dt^2} = 56\,,\quad \frac{df(0)}{dt} = 2\,,\quad f(0) = 15$$

（解法）

$f(t)$の像関数を$F(s)$とし、両辺のラプラス変換をとると、式（４．５）より

$$(s^3F(s) - 15s^2 - 2s - 56) - (s^2F(s) - 15s - 2) - 6(sF(s) - 15) = 0$$

従って、　$F(s) = \dfrac{15s^2 - 13s - 36}{s^3 - s^2 - 6s} = \dfrac{6}{s} + \dfrac{5}{s+2} + \dfrac{4}{s-3}$　　となるので、

$$f(t) = 6 + 5e^{-2t} + 4e^{3t}$$

となる。

【演習問題】

(4-7)　次の微分方程式をそれぞれの初期値のもとで解け。

$$\frac{d^3f(t)}{dt^3} - 2\frac{d^2f(t)}{dt^2} + \frac{df(t)}{dt} = 4\,,\quad f(0) = 1\,,\quad f'(0) = 2\,,\quad f''(0) = -2$$

(4-8)　次の微分方程式をそれぞれの初期値のもとで解け。

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2} + 3\frac{df(t)}{dt} + 2f(t) = 1 + t + t^2\,,\quad f(0) = a\,,\quad f'(0) = b$$

応用例：電気回路方程式

ラプラス変換を使うと、微分、積分という複雑な計算を経ることなく、簡単な代数計算によって微分方程式を解くことができるようになる。ラプラス変換はその定義から初期値がつきものである。電気回路の過渡現象においても初期値が分かっている場合がほとんどのため、ラプラス変換を用いられることが多い。

【例題４－５】Fig. 4-2 に示すような RC 回路を考える。このとき、コンデンサーに初期電荷Q_0 (= $Q(0)$)があれば、スイッチを閉じる($t = 0$)と時間とともに放電して電位が減少する（過渡現象）。この場合におけるコンデンサー電位$v(t)$の時間変化を数式で表せ。ここで、R は電気抵抗、C は静電容量である。

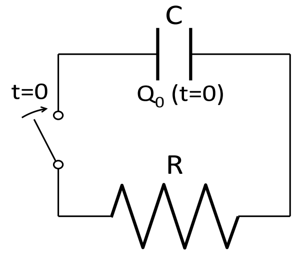


Fig. 4-2　RC 回路

（解法）

コンデンサーの端子電圧と電荷との関係は、$v(t) = \dfrac{Q}{C} = \dfrac{Q(t)}{C}$

キルヒホッフの第２法則より（スイッチから時計回りに１周）以下の式が成り立つ。

$$-\frac{Q}{C} + IR = 0 \ \left(\rightarrow\ -\frac{Q(t)}{C} + I(t)R = 0\right)$$

またキルヒホッフの第１法則（電荷保存）より、コンデンサーの電荷変化分は電流となるから、

$$I = -\frac{dQ}{dt} \ \left(\rightarrow\ I(t) = -\frac{d}{dt}Q(t)\right)$$

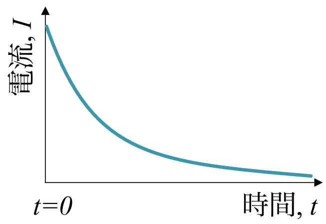


Fig. 4-3　過渡現象

これより、電位に関する回路方程式は、$R\dfrac{d}{dt}Q(t) + \dfrac{Q(t)}{C} = 0$ で表される。

（i）　<u>ラプラス変換を使わない解法</u>

得られた回路方程式の両辺に変数分離すると、

$$\frac{1}{Q}dQ = -\frac{1}{RC}dt$$

両辺を積分し整理すると、一般解が得られる。

$$\int \frac{1}{Q}dQ = -\int \frac{1}{RC}dt$$

$$\log|Q| = -\frac{1}{RC}t + A \quad (A：定数)$$

$$Q(t) = e^{-\frac{1}{RC}t+A} \quad (Q > 0)$$

$$= Be^{-\frac{1}{RC}t} \quad (B = e^A\ ：定数)$$

次に初期条件（$Q(0) = Q_0$）から特解を求める。

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{1}{RC}t}$$

コンデンサー電位は、

$$v(t) = \frac{Q_0}{C}e^{-\frac{1}{RC}t}$$

（ii）　<u>ラプラス変換を使った解法</u>

$\mathcal{L}[Q(t)] = F(s)$として、得られた回路方程式（微分方程式）の両辺をラプラス変換する。

$$R\big(sF(s) - Q(0)\big) + \frac{1}{C}F(s) = 0$$

$$\left(sR + \frac{1}{C}\right)F(s) = RQ_0$$

$$F(s) = \frac{Q_0}{s + \frac{1}{RC}}$$

よって、これをラプラス逆変換すると

$$Q(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = Q_0 e^{-\frac{1}{RC}t}$$

コンデンサー電位は、

$$v(t) = \frac{Q_0}{C}e^{-\frac{1}{RC}t}$$

以上よりQについてたてた微分方程式はラプラス変換によって簡単な代数計算で特解まで得られることが分かった。また、Qではなく電流Iについての方程式にすると積分方程式になってしまうことに注意。Qが得られればtで微分してマイナスを付けると電流Iになるので、Qを求めれば十分である。

【復習】偏微分方程式

一般に微分方程式は、$f(x)$などの１変数関数の **“常微分方程式”** と、$f(x,y)$などの多変数関数の **“偏微分方程式”** の２つに大別される。実用的な微分方程式の問題になれば、少なくとも位置xと時刻tの２つの変数が必要となるので、偏微分方程式を解くことになる。

“常微分方程式” と “偏微分方程式” の簡単な例を示す。

(i)　常微分方程式：$\dfrac{du}{dx} = 0$　・・・①　　１階常微分方程式

uが１変数xの関数である場合、①の常微分方程式の解は$u = c$（定数）となる。

これに対して、

(ii)　偏微分方程式：$\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$　・・・②　　１階偏微分方程式

uは２変数xとyの関数とすると、②は２変数関数の微分方程式である偏微分方程式となる。従って、①の$\dfrac{du}{dx}$の代わりに$\dfrac{\partial u}{\partial x}$と表記することとなる。２変数関数$u$を$x$で微分して０となるためには、$u$は①のような定数関数ではなく$y$の関数となり、②の解は$u = f(y)$となる。この$f(y)$は、$y$の任意関数である。（つまり$f(y)$は、$y^2 + 3y + 1$、$e^y$、$\sin y$など何でも構わない$y$のどんな関数でも、$x$で微分すれば0となる。）

このように偏微分方程式では、任意定数の代わりに任意関数を含む解が得られ、このような解を偏微分方程式の “一般解” と呼ぶ。→偏微分方程式の一般解は任意関数を含む！

そして、

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \cdots ②$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0 \cdots ③$$

$u_x = 0 \cdots ②'$

$(u_x)^2 + (u_y)^2 = 0 \cdots ③'$

と表現することもある。

などは、uをxまたはyで１階しか微分していないので、**“１階微分方程式”** と呼ぶ。

これに対して、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdots ④$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \cdots ⑤$$

$u_t = u_{xx} \cdots ④'$

$u_{xx} + u_{yy} = 0 \cdots ⑤'$

と表現することもある。

などはuをxまたはyで２階微分しているので、**“２階微分方程式”** と呼ぶ。また、②、④、⑤はu_x、u_t、u_{xx}、u_{xx}などがすべて１次式の微分方程式なので、**“線形偏微分方程式”** と呼ぶ。

【例題】

次の偏微分方程式の２変数関数$u(x,y)$の一般解を求めよ。

（１）$\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2$、　（２）$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -1$、　（３）$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1$

$u = u(x,y)$であることに気をつけて解く！

（１）$\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2$ より、$u = 2y + f(x)$　（ただし、$f(x)$：任意関数）

（２）　$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -1$ の両辺をxで積分して、

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -x + f(y)$$

さらにこの両辺をxで積分して、

$u = -2x^2 + xf(y) + g(y)$　（ただし、$f(y),\ g(y)$：任意関数）

（３）　$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1$ の両辺をyで積分して、

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + \tilde{f}(x)$$

さらにこの両辺をxで積分して、

$$u = xy + \underline{\int \tilde{f}(x)\,dx} + g(y)$$

これを新たに任意関数$f(x)$とおく。

$u = xy + f(x) + g(y)$　　（ただし、$f(x),\ g(y)$：任意関数）

<u>偏微分方程式の公式</u>

２変数関数$u(x,y)$が全微分可能な関数ならば、

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \cdots ①$$

である。

そしてさらにxとyが共にsとtの微分可能な２変数関数$x = x(s,t)$、$y = y(s,t)$であるならば、①から、

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} \cdots ②$$　←［①の両辺を形式的に∂sで割った形である。］

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} \cdots ③$$　←［①の両辺を形式的に∂tで割った形である。］

が導かれる。

偏微分方程式の公式(I)

２変数関数$u(x,y)$が偏微分方程式：

$$c_1 \frac{\partial u}{\partial y} = c_2 \frac{\partial u}{\partial x} \cdots \text{(a)}$$　（c_1, c_2：定数、$c_1 \neq 0$）を満たすとき、

(a)の解は、$u = f(c_1 x + c_2 y)$となる。

偏微分方程式の公式(II)

２変数関数$u(x,y)$が偏微分方程式：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = {c_1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdots \text{(b)}$$　（c_1：定数、$c_1 \neq 0$）を満たすとき、

(b)の解は、$u = f(x - c_1 y) + g(x + c_1 y)$となる。（ただし、$f$と$g$は２階微分可能な任意関数）
この解uを“ダランベールの解”と呼ぶ。

このダランベールの解は、１次元波動方程式の解を求めるときにも利用される。

<u>実用的な２階線形偏微分方程式</u>

最後に実用的でかつ典型的な２階線形偏微分方程式の例を以下に示す。これまでに学習したフーリエ級数、フーリエ変換やラプラス変換を、これらの微分方程式を解く際に用いられる。

(i) 熱伝導方程式

１次元熱伝導方程式： $\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

２次元熱伝導方程式： $\frac{\partial u}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$

３次元熱伝導方程式： $\frac{\partial u}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$

(ii) ラプラス方程式

２次元ラプラス方程式： $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

３次元ラプラス方程式： $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

(iii) 波動方程式

１次元波動方程式： $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

２次元波動方程式： $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$

３次元波動方程式： $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$