３．フーリエ変換

これまで周期関数$f(x)$（周期：2πや$2L$）のフーリエ級数について述べてきた。しかし、$L\to\infty$としたとき、$f(x)$はもはや周期関数ではない非周期関数となる。この非周期関数についてはフーリエ級数ではなく、以下に解説する「フーリエ変換」や「フーリエ逆変換」が有効となる。

３－１．フーリエ変換とフーリエ逆変換

周期関数ではない関数の場合、フーリエ級数展開における周期Tを無限に大きく取って考える。

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n\cdot e^{in\omega_0 t} \qquad \cdots（３．１）$$

$$C_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cdot e^{-in\omega_0 t}\,dt \qquad \left(\text{ただし、}\omega_0=\frac{2\pi}{T}\right) \qquad \cdots（３．２）$$

式（３・２）のtをxに変えて、式（３．１）に代入すると、

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\cdot e^{-in\omega_0 x}\,dx\right)\cdot e^{in\omega_0 t} \qquad \cdots（３．３）$$

$\dfrac{1}{T}=\dfrac{\omega_0}{2\pi}$より$T\to\infty$のとき$\omega_0\to 0$、従って、

$$f(t)=\lim_{\omega_0\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cdot e^{-in\omega_0 x}\,dx\right)\cdot e^{in\omega_0 t}\cdot\omega_0 \qquad \cdots（３．４）$$

$\omega_0\to 0$のもとで、nは無限大に接近するため、$n\omega_0$は有限な周波数ωに接近する。
すなわち、式（３．４）で、$\omega_0\to d\omega$、$n\omega_0\to\omega$とおくと、

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cdot e^{-i\omega x}\,dx\right)\cdot e^{i\omega t}\cdot d\omega$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\cdot e^{i\omega t}\cdot d\omega \qquad \cdots（３．５）$$

ここで$F(\omega)$を$f(x)$の<u>フーリエ変換</u>という。

$$\boldsymbol{F(\omega)=\mathcal{F}[f(x)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cdot e^{-i\omega x}\,dx} \qquad \cdots（３．６）$$

フーリエ変換が可能な条件：　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty$　（絶対積分可能）

フーリエ変換できる関数$f(x)$の条件として、厳密には「区分的に滑らかで、かつ連続で、かつ“絶対積分可能”」であることが必要である。また絶対積分可能であることを満たすと表記してもよい。

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx\le M \qquad (M\text{:有限な正の定数})$$

式（３・５）のtをxに置換して示すと、

$$\boldsymbol{f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\cdot e^{i\omega x}\, d\omega} \qquad \cdots(3.\ 7)$$

$f(x)$を$F(\omega)$の<u>フーリエ逆変換</u>という。

教科書によっては式（３・５）を

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot e^{-i\omega x}\,dx\right)\cdot e^{i\omega t}\cdot \mathrm{d}\omega \text{ として、}$$

$$\begin{cases} \text{(i) フーリエ変換} & F(\omega) = \mathcal{F}[f(x)] = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot e^{-i\omega x}\,dx \\ \text{(ii) フーリエ逆変換} & f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\cdot e^{i\omega x}\,d\omega \end{cases}$$

または、$f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot e^{-i\omega x}\,dx\right)\cdot e^{i\omega t}\cdot \mathrm{d}\omega$ として、

$$\begin{cases} \text{(i) フーリエ変換} & F(\omega) = \mathcal{F}[f(x)] = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot e^{-i\omega x}\,dx \\ \text{(ii) フーリエ逆変換} & f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\cdot e^{i\omega x}\,d\omega \end{cases}$$

と定義することもある。フーリエ変換とその逆変換の場合、(i) $f(x) \to F(\omega)$と(ii) $F(\omega) \to f(x)$の２つをセットにして、元の$f(x)$に戻れば良いという発想があるため、定義に若干の違いがあるが、本質的な違いはない。本講義では、式（３・６）、式（３・７）の定義に従って進めていく。

【例題３－１】

Fig. 3-2 に示す方形パルスフーリエ変換を求めよ。

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| < d) \\ 0 & (|x| > d) \end{cases}$$

（解法）

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(x)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot e^{-i\omega x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-d}^{d} e^{-i\omega x}\,dx$$

$$= \frac{d}{\pi}\frac{\sin\omega d}{\omega d} \qquad \left(= \frac{d}{\pi}\operatorname{sinc}\omega d\right)$$

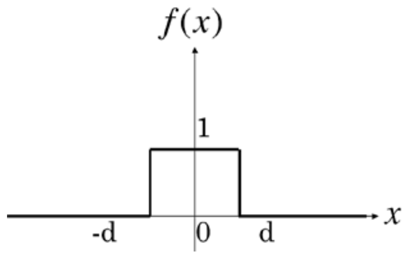


Fig. 3-2　方形パルス

$sinc$関数はカーディナル・サイン（cardinal sine）とも呼ばれ、正弦関数をその変数で割って得られることで定義される。

$$sinc\ x = \frac{\sin x}{x}$$

例題３－１で述べたように方形パルス（矩形波）のフーリエ変換であることから、デジタル信号処理などの分野で多用される。

【例題３－２】

デルタ関数$f(x) = \delta(x - x_0)$についてフーリエ変換を求めよ。

（解法）

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(x)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot e^{-i\omega x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0)\cdot e^{-i\omega x}\,dx$$

$$\left(\text{デルタ関数の性質２：}\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)\,dx = f(a)\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}e^{-i\omega x_0}$$

【例題３－３】

定数A$\{f(x) = \mathrm{A}\}$のフーリエ変換を求めよ。

（解法）

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(x)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot e^{-i\omega x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-i\omega x}\,dx = \frac{1}{2\pi}A\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(-\omega)x}\,dx$$

$$\left(\text{演習問題}(3-3)\text{より}\ \delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha t}\,d\alpha\right)$$

$$= \mathrm{A}\delta(-\omega) \qquad (\,\delta(-\omega) = \delta(\omega)\,)$$

$$= \mathrm{A}\delta(\omega)$$

定数 A のフーリエ変換は係数 A のデルタ関数になる。

【演習問題】

(3-1)　次式で与えられる関数$f(x) = e^{-ax}u(x)\ (a > 0)$のフーリエ変換を求めよ。ただし、

$$u(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x > 0) \end{cases}$$ （ヘビサイド関数）

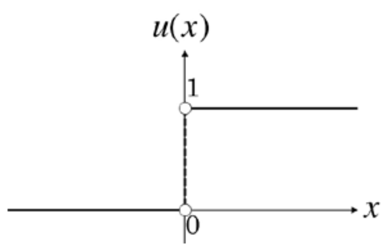


Fig. 3-3　ヘビサイド関数（Heaviside）

(3-2)　次の方形パルスのフーリエ変換を求め、$\delta(x)$関数のフーリエ変換が $\frac{1}{2\pi}$ であることを示せ。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2d} & (|x| < d) \\ 0 & (|x| > d) \end{cases}$$

(3-3)　(3-2) の結果を用いて、次式を示せ。

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}d\omega$$

【例題３－３】

デルタ関数が周期Tで配列した周期的デルタ関数のフーリエ変換を求めよ。

$$\text{周期的デルタ関数：}\ \delta_T(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nT)$$

（解法）

区間：$-\dfrac{T}{2}<x<\dfrac{T}{2}$, $\delta_T(x)$ をフーリエ級数展開すると

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\delta_T(x)e^{-in\omega_0x}\,dx=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\delta(x)e^{-in\omega_0x}\,dx=\frac{1}{T}e^0=\frac{1}{T}$$

（デルタ関数の性質２：$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x-a)\,dx=f(a)$）

$$\therefore\quad \delta_T(x)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{in\omega_0x}=\frac{1}{T}\left(\cdots+e^{-2i\omega_0x}+e^{-i\omega_0x}+e^0+e^{-\omega_0x}+e^{2i\omega_0x}+\cdots\right)$$

ここで、$g(x)=e^{in\omega_0x}$のフーリエ変換は

$$\mathcal{F}[g(x)]=\mathcal{F}\left[e^{in\omega_0x}\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{in\omega_0x}e^{-i\omega x}\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(n\omega_0-\omega)x}\,dx$$

また、$\delta(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega x}\,d\omega$　より

$$\mathcal{F}\left[e^{in\omega_0x}\right]=\delta(n\omega_0-\omega)=\delta(\omega-n\omega_0)$$

$$\mathcal{F}[\,\delta_T(x)]=\frac{1}{T}(\cdots+\delta(\omega+2\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega)+\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega-2\omega_0)+\cdots)$$

周期的デルタ関数 $\delta_T(x)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-nT)$　の式より

$$\delta_{\omega_0}(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_0)$$

$$\mathcal{F}[\delta_T(x)]=\frac{\delta_{\omega_0}(\omega)}{T}$$

フーリエ余弦変換（フーリエ・コサイン変換）

$f(x)$が偶関数であるとき、

$$F(\omega)=\mathcal{F}[f(x)]=\frac{2}{2\pi}\int_0^{\infty}f(x)\cos\omega x\,dx\qquad\cdot\cdot\cdot(３．８)$$

$$f(x)=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\cos\omega x\,d\omega\qquad\cdot\cdot\cdot(３．９)$$

（証明）

$$F(\omega)=\mathcal{F}[f(x)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)(\cos\omega x-i\sin\omega x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{f(x)\cos\omega x}_{(偶関数)\times(偶関数)}\,dx-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{f(x)(i\sin\omega x)}_{(偶関数)\times(奇関数)}\,dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{f(x)\cos\omega x}_{(偶関数)}\,dx$$

$$= \underbrace{\frac{2}{2\pi}\int_{0}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx}_{\text{実数関数}}$$

$$\underbrace{f(x)}_{\text{実数関数}} = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{F(\omega)}_{\text{実数関数}}(\underbrace{\cos\omega x}_{\text{実数関数}} + \underbrace{i\sin\omega x}_{\text{純虚数関数}})\,d\omega$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\cos\omega x\,d\omega}_{\text{実数関数}}$$

フーリエ正弦変換（フーリエ・サイン変換）

$f(x)$が奇関数であるとき、

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(x)] = \frac{-2i}{2\pi}\int_{0}^{\infty} f(x)\sin\omega x\,dx \qquad \cdot\cdot\cdot(3.10)$$

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = i\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\sin\omega x\,d\omega \qquad \cdot\cdot\cdot(3.11)$$

（証明）

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(x)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\cos\omega x - i\sin\omega x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(x)\cos\omega x}_{\text{(奇関数)×(偶関数)}}\,dx - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(x)(i\sin\omega x)}_{\text{(奇関数)×(奇関数)}}\,dx$$

$$= \frac{-i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(x)\sin\omega x\,dx}_{\text{(偶関数)}}$$

$$= \underbrace{\frac{-2i}{2\pi}\int_{0}^{\infty} f(x)\sin\omega x\,dx}_{\text{純虚数関数}}$$

$$\underbrace{f(x)}_{\text{実数関数}} = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{F(\omega)}_{\text{純虚数関数}}(\underbrace{\cos\omega x}_{\text{実数関数}} + \underbrace{i\sin\omega x}_{\text{純虚数関数}})\,d\omega$$

$$= \underbrace{i\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\sin\omega x\,d\omega}_{\text{実数関数}}$$

【演習問題】

周期関数のフーリエ変換がどのような特徴を持つのか考えてみよう。

(3-4)　関数$F(\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$についてフーリエ逆変換を求めよ。

(3-5)　関数$f(t) = \cos\omega_0 t$についてフーリエ変換を求めよ。

(3-6)　関数$f(t) = \sin\omega_0 t$についてフーリエ変換を求めよ。

三角関数（もともと周期関数）が非周期化した関数のフーリエ変換の特徴についても考えてみよう。

(3-7)　$\cos\omega_0 t$の１周期分の関数$f(t)$についてフーリエ変換を求めよ。

$$f(t) = \begin{cases} \cos\omega_0 t & (-T \le t \le T) \\ 0 & (t < -T, T < t) \end{cases} \quad \left(T = \frac{2\pi}{\omega_0}\right)$$

(3-8)　$\sin\omega_0 t$の１周期分の関数$f(t)$についてフーリエ変換を求めよ。

$$f(t) = \begin{cases} \sin\omega_0 t & (-T \le t \le T) \\ 0 & (t < -T, T < t) \end{cases} \quad \left(T = \frac{2\pi}{\omega_0}\right)$$

<u>フーリエ変換のイメージ</u>

式（３．６）ならびに式（３．７）において、xをtに置き換えると以下の操作を行っている。

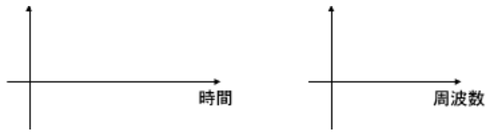
式（３．６）：　$f(t)$（時間の関数）　→　$F(\omega)$（周波数の関数）

式（３．７）：　$F(\omega)$（周波数の関数）　→　$f(t)$（時間の関数）

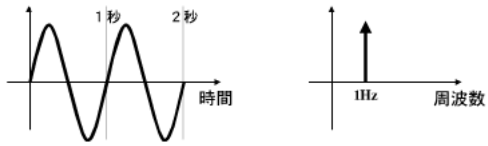
（参考）<u>フーリエ変換とデジタル信号処理</u>

フーリエ変換は、信号の「時間領域」表現と「周波数領域」表現の変換である。

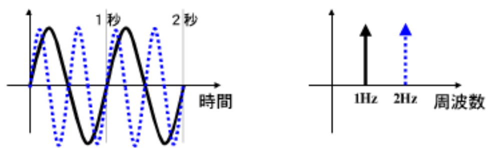
「時間領域」とは横軸を時間にして表現する世界（我々が直接感じることができる世界）であり（左）、「周波数領域」とは横軸を周波数にして表現する世界である（右）。



時間領域（左）に例として、１ 秒で １ 周期、すなわち １ Hz のサイン波をプロットした。（一定の振幅と周期を持っている）
同じ信号を周波数領域（右）で表現するとこのようになる。



時間領域（左）にさらにもう １ つの違う周期（0.5 秒で １ 周期、2 Hz）のサイン波を加えた。
同様に、周波数領域の表現は右のようになる。



時間領域の表現では現実世界の時間を横軸に取り、その振る舞いを表している。しかしその信号が何 Hz か?を知るには向いていない。そこで周波数領域で表現すると一目瞭然で何 Hz かを知ることができる。

実際に信号を測定した時、さまざまな周波数が混ざり合った波が時間領域で表現される。しかし、どのような波がどれくらいの強度で含まれているかは時間領域では知ることができない。ここで、「時間領域」を「周波数領域」に変換できれば、どのような波がどれくらいの強度で含まれているかを知ることができる。この変換がフーリエ変換である。

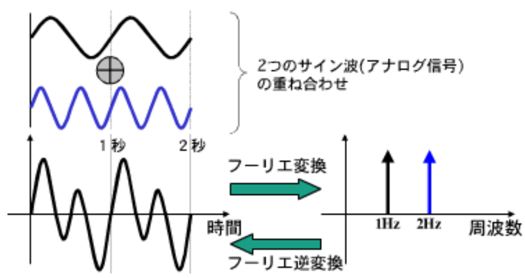


Fig. 3-4

一方、「周波数領域」から「時間領域」への変換がフーリエ逆変換である。

３－２．フーリエ変換の性質

（１）線形性（重ね合わせの理）

$F_1(\omega) = \mathcal{F}[f_1(x)]$、$F_2(\omega) = \mathcal{F}[f_2(x)]$、$a$および$b$を任意の定数とすると、

$$\mathcal{F}[af_1(x) + bf_2(x)] = aF_1(\omega) + bF_2(\omega) \qquad ・・・（３．１２）$$

（証明）

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[af_1(x) + bf_2(x)] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{af_1(t) + bf_2(t)\}\cdot e^{-i\omega t}dt \\ &= a\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)\cdot e^{-i\omega t}dt + b\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f_2(t)\cdot e^{-i\omega t}dt \\ &= aF_1(\omega) + bF_2(\omega)\end{aligned}$$

（２）縮尺

$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$、$a$を定数とすると、

$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right) \qquad ・・・（３．１３）$$

（証明）

$\mathcal{F}[f(at)]$において$at = y$とおくと、　$dt = \dfrac{dy}{a}$

$a > 0$のとき

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(at)] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(at)\cdot e^{-i\omega t}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\cdot e^{-i\frac{\omega}{a}y}\frac{dy}{a} = \frac{1}{a}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\cdot e^{-i\frac{\omega}{a}y}dy \\ &= \frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right)\end{aligned}$$

$a < 0$のとき　　　$t: -\infty\sim\infty$ならば、$y = at: \infty\sim-\infty$なので、

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(at)] &= \frac{1}{a}\frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{-\infty}f(y)\cdot e^{-i\frac{\omega}{a}y}dy = \frac{1}{-a}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\cdot e^{-i\frac{\omega}{a}y}dy \\ &= \frac{1}{-a}F\left(\frac{\omega}{a}\right)\end{aligned}$$

$$\therefore\ \mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

（３）対称性

$F(\omega) = \mathcal{F}[f(x)]$のとき、

$$\mathcal{F}[F(t)] = \frac{f(-\omega)}{2\pi} \qquad ・・・（３．１４）$$

（証明）

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\cdot e^{i\omega t}\,d\omega \qquad （フーリエ逆変換）$$

$t \to -t$とすると　　$f(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{-i\omega t}\, d\omega$

$t \leftrightarrow \omega$入れ替える　　$f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \cdot e^{-i\omega t}\, dt$

ところで、　$\mathcal{F}[F(t)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(t) \cdot e^{-i\omega t}\, dt$　　より

$$f(-\omega) = 2\pi \cdot \mathcal{F}[F(t)]$$

$$\therefore \ \mathcal{F}[F(t)] = \frac{f(-\omega)}{2\pi}$$

（４）微分演算

$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$とし、$t \to \pm\infty$のとき、$f(t) \to 0$ とすると、

$$\mathcal{F}\left[f^{(n)}(t)\right] = (i\omega)^n \cdot \mathcal{F}[f(t)] \qquad \cdots（３．１５）$$

（証明）

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f'(t)] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f'(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\left\{\underbrace{\left[f(t) \cdot e^{-i\omega t}\right]_{-\infty}^{\infty}}_{0} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot (-i\omega) e^{-i\omega t} dt\right\}
\end{aligned}$$

$\because t \to \pm\infty$のとき$f(t) \to 0$

$$\begin{aligned}
&= \frac{i\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \\
&= i\omega \cdot \mathcal{F}[f(t)]
\end{aligned}$$

$$\therefore \ \mathcal{F}\left[f^{(n)}(t)\right] = (i\omega)^n \cdot \mathcal{F}[f(t)]$$

【演習問題】

(3-9)　$g(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}$のフーリエ変換を求め、これを参照にして、以下の関数$f(x)$のフーリエ変換を求めよ。

$$f(x) = \frac{1}{(x^2 + a^2)}$$

（５）たたみこみ積分（合成積）

たたみこみ積分の定義：　$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(t - x) dx$　　・・・（３．１６）

２つの関数の合成法の１種がたたみこみ積分（合成積）である。その基本的な意味は、２つの関数で互いに平滑化することである。実験・観測データは真の値と測定装置の特性関数のたたみこみであるなど、この考え方は極めて応用範囲が広い。

$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$、$G(\omega) = \mathcal{F}[g(t)]$とすると、

時間的たたみこみの定理：　$\mathcal{F}[f(t) * g(t)] = 2\pi F(\omega) G(\omega)$　　・・・（３．１７）

周波数たたみこみの定理：　$\mathcal{F}[f(t) \cdot g(t)] = F(\omega) * G(\omega)$　　・・・（３．１８）

（６）フーリエ変換におけるパーシバルの等式

パーシバルの等式：　$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{f(x)\}^2\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\,d\omega$$　・・・（３．１９）

【例題３－４】

$f(x)=\mathrm{e}^{-|x|}$のフーリエ変換は　$F(\omega)=\mathcal{F}[f(x)]=\dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{(\omega^2+1)}$　である。

このとき、パーシバルの等式を用いて、定積分　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\omega^2+1)^2}d\omega$　の値を求めよ。

（解法）

パーシバルの等式

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{f(x)\}^2\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\,d\omega$$

より、左辺は、

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{f(x)\}^2\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-2|x|}\,dx=\frac{2}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-2x}\,dx=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{\pi}\left(0+\frac{1}{2}\times1\right)=\frac{1}{2\pi}$$

右辺は、

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\,d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{\pi}\frac{1}{(\omega^2+1)}\right|^2 d\omega=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\omega^2+1)^2}d\omega$$

よって、

$$\frac{1}{2\pi}=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\omega^2+1)^2}d\omega$$

より、

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\omega^2+1)^2}d\omega=\frac{\pi}{2}$$

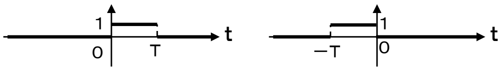
これまで学習したフーリエ級数やフーリエ変換を使って、偏微分方程式を解くことが出来る。$f(x)$などの 1 変数関数の微分方程式である“常微分方程式”と、$f(x,y)$ など多変数関数の微分方程式である“偏微分方程式”との、微分方程式は一般にこれら２つに大別される。工学における微分方程式の多くは位置と時刻が含まれ、少なくとも２つの変数x,tが必要となるので、偏微分方程式を解くことは重要である。

材料科学において重要とされる拡散方程式（または熱伝導方程式）や波動方程式などは偏微分方程式で表され、これを解くことによって、物質移動（熱移動）の経時変化や波の重ね合わせの原理を理解することができる。

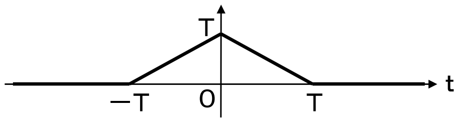
たたみこみ積分の例

2つの矩形関数

$$f(t)=\begin{cases}1 & (0\le t<T)\\ 0 & (t<0,\ T\le t)\end{cases},\quad g(t)=\begin{cases}1 & (-T\le t<0)\\ 0 & (t<-T,\ 0\le t)\end{cases}$$

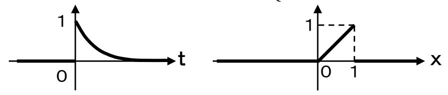


$$h(t)=f*g(t)=\begin{cases}t+T & (-T\le t<0)\\ T-t & (0\le t<T)\\ 0 & (t<-T,\ T\le t)\end{cases}$$

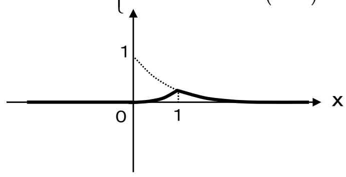


指数関数と一次関数

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x} & (0\le x)\\ 0 & (x<0)\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}x & (0\le x<1)\\ 0 & (x<0,\ 1\le x)\end{cases}$$

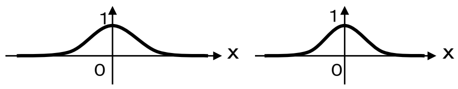


$$h(x)=f*g(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ x-1+e^{-x} & (0\le x<1)\\ e^{-x} & (x>1)\end{cases}$$

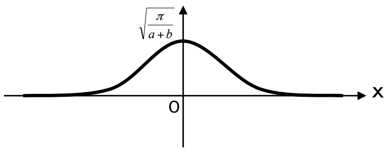


2つのガウス関数

$$f(x)=e^{-ax^2},\quad g(x)=e^{-bx^2}$$



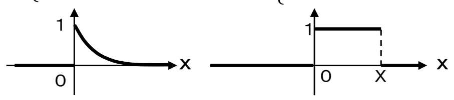
$$h(t)=f*g(t)=\sqrt{\frac{\pi}{a+b}}e^{-\frac{ab}{a+b}x^2}$$



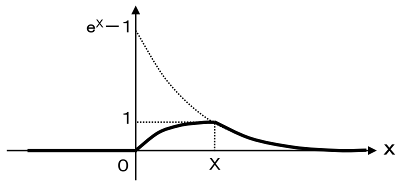
2つのガウス関数の畳み込みはガウス関数
ただし幅が少し大きくなる

指数関数と矩形関数

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x} & (0\le x)\\ 0 & (x<0)\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}1 & (0\le x<X)\\ 0 & (x<0,\ X\le x)\end{cases}$$

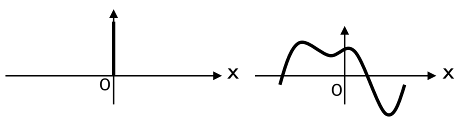


$$f*g(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ 1-e^{-x} & (0\le x<X)\\ (e^{X}-1)e^{-x} & (x>X)\end{cases}$$

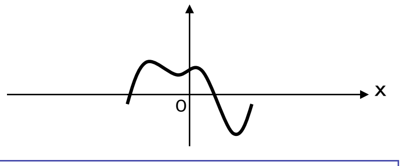


δ関数と任意関数

$$f(x)=\delta(x),\quad g(x)=g(x)$$



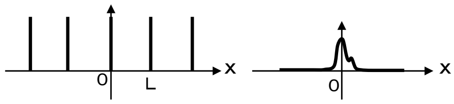
$$h(x)=f*g(x)=g(x)$$



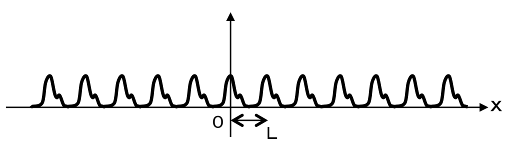
δ関数との畳み込みは、元の関数と同じ

周期Lのδ関数列と任意関数

$$f(x)=\sum_n \delta(x-nL),\quad g(x)=g(x)$$



$$h(x)=f*g(x)=\sum_n g(x-nL)$$



δ関数列との畳み込み演算は、
周期関数を作る