
工業数学 II (14組)

東北大学 工学部 材料科学総合学科

講義資料 (平成26年度版)

担当教員：亀川厚則 (kamegawa@material.tohoku.ac.jp)

1. はじめに

授業概要

工学の中で利用されている実用的な数学を習得することが本講義の目的である。
従って、

- (1) 指定テキストにあるような基礎数学の厳密な証明は原則的に行わない。
(証明は、教科書を利用して個人的に理解すること)
- (2) 授業内容に沿って具体的な演習に重点を置く。

授業内容

- ・ **フーリエ級数** フーリエ級数展開、フーリエ級数展開の微分と積分、複素フーリエ級数
- ・ **フーリエ変換** フーリエ変換と逆変換、フーリエ変換の性質
- ・ **ラプラス変換** ラプラス変換の定義、基本法則と応用例
- ・ **ベクトル解析** ベクトルの微分、ベクトルの積分

教科書、参考書

特に教科書は設けず、WEB や講義で配布するプリントにより講義を進める。
亀川の講義 WEB サイト

URL: <http://ceram.material.tohoku.ac.jp/~kamegawa/lec.html>

(参考書)

- ・ 応用解析学、廣池和夫ら著、共立出版
- ・ なっとくするフーリエ変換、小暮陽三著、講談社
- ・ 線形代数とベクトル解析 (技術者のための高等数学 2)、E.クライツィグ著、堀素夫訳、培風館

2. フーリエ級数展開

2-1. フーリエ級数展開 ~フーリエ級数とは~

フーリエ級数展開：「ある区間 $[a, b]$ において、任意の連続関数 $f(x)$ は種々の周期を持つ三角関数の和によって近似しうる。」

基本的に周期関数であればどのような関数でも三角関数の重ね合わせ(和)による近似が可能である。

フーリエ変換：「任意の連続関数 $f(x)$ は、連続的な変数 ω を含む三角関数と連続関数 $F(\omega)$ との積の ω 積分により近似しうる。」

無限大の周期 $f(x)$ と考え近似。フーリエ級数展開を拡張したに過ぎない。

(応用例)

- (1) 熱拡散微分方程式の解法
- (2) 音波、電波の周波数成分への分解、合成 (Fig. 2-1)
- (3) スペクトル解析 (エネルギー分布) (Fig. 2-3)
- (4) 電波信号のフィルタリング (Fig.2-4)
- (5) 電気回路の解析 (Fig.2-2)
- (6) 結晶構造解析 など

本章ではフーリエ級数展開について述べ、次章にてフーリエ変換について述べる

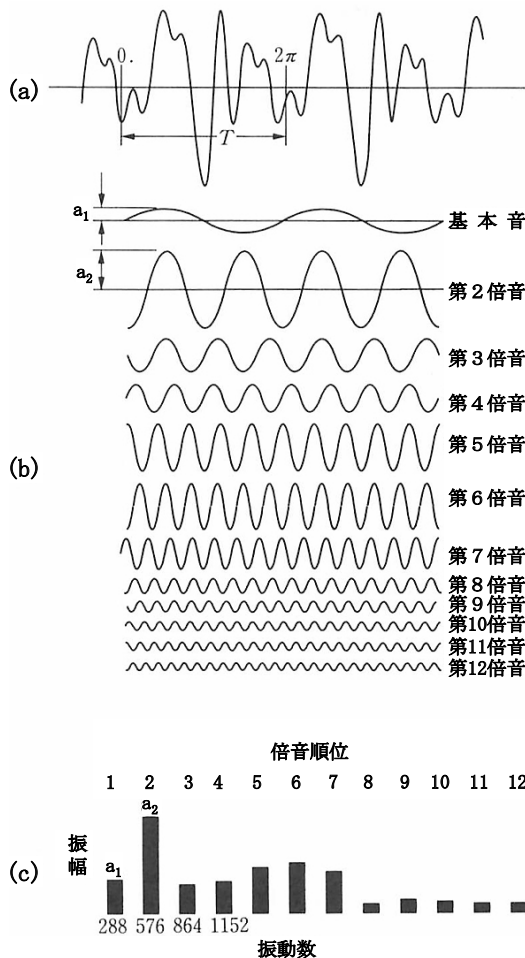


Fig. 2-1 (a), (b) 尺八の「ろ」の音(指穴を全部閉じたとき)の分析図。(c) 尺八の「ろ」の音のスペクトル

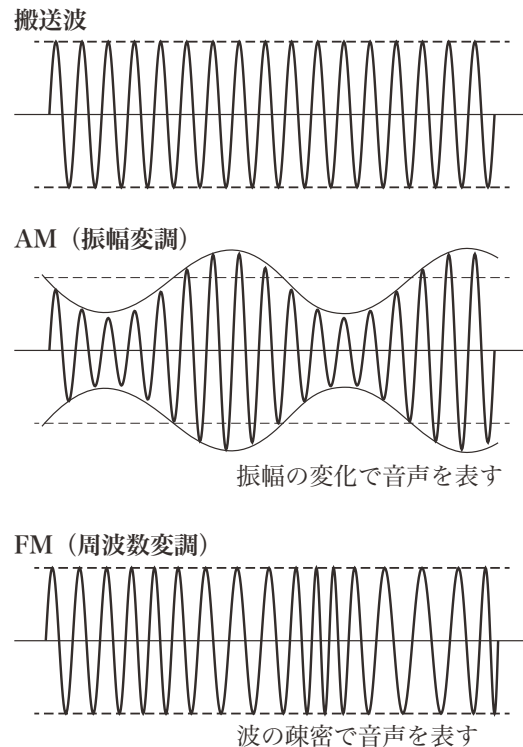


Fig. 2-2 変調

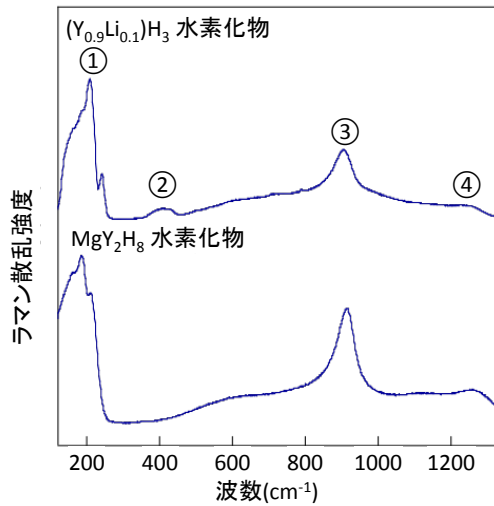


Fig. 2-3 金属水素化物のラマン散乱スペクトル
①金属副格子による振動、②, ④水素を
囲む八面体サイトの振動、③四面体サ
イトの伸縮振動に起因

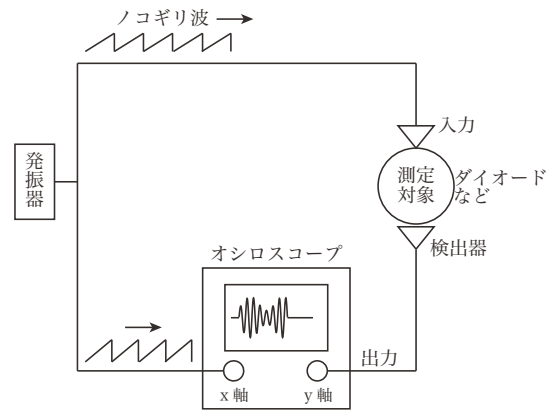


Fig. 2-4 ダイオードが完全な整流をすれば、 y
は発振したのと同じノコギリ波を出
力

【復習】

三角関数の公式

加法定理

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

積→和の公式

$$\begin{aligned} \cos \alpha \cos \beta &= \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2} \\ \sin \alpha \sin \beta &= -\frac{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)}{2} \\ \sin \alpha \cos \beta &= \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2} \end{aligned}$$

部分積分の公式

$$\begin{aligned} \int f \cdot g' dx &= f \cdot g - \int f' \cdot g dx \\ \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx &= [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx \end{aligned}$$

2倍角の公式

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ &= 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ &= 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$

半角の公式

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha &= \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \\ \sin^2 \alpha &= \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \end{aligned}$$

2-2. フーリエ級数展開

a) フーリエ級数展開

フーリエ級数展開：関数 $f(x)$ を周期 2π の周期関数とすると、

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \dots + a_n \cos nx + \dots$$

$$+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \dots + b_n \sin nx + \dots$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad \dots (2. 1)$$

このように三角関数で表すことをフーリエ級数展開という。
 ここで、周期関数 $f(x)$ は区間 $[-\pi, \pi]$ で定義されるとすると、

フーリエ係数 (区間 $[-\pi, \pi]$)

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \end{cases} \quad \dots (2. 2) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

である。

本来、周期 2π の関数 $f(x)$ は区間を任意に決められる。従って、与えられた問題に応じて周期を変えないことに留意して、適宜区間を変えて問題を解くことができる。たとえば、区間 $[0, 2\pi]$ とすると、

フーリエ係数 (区間 $[0, 2\pi]$)

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \\ a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx \end{cases} \quad \dots (2. 2') \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

である。

関数 $f(x)$ が周期 2π の周期関数であることを考慮すると、式(2. 2)と(2. 2')は同義である。
 次に、周期が 2π でない場合(→周期 $2L$)を考える。

関数 $f(x)$ が周期 $2L$ の周期関数の場合：

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad \dots (2. 3)$$

フーリエ係数 (区間 $[0, 2L]$)

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x) dx \\ a_n = \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ b_n = \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \end{cases} \quad \dots (2. 4) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

先に述べたように、区間は任意に考えることができる。上式は周期 $2L$ ならば区間 $[-L, L]$ として、積分区間を変更すればよい。

区間 $[a, b]$ とした場合は以下の様に表される。

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \text{ ただし } \left(L = \frac{b-a}{2} \right)$$

$$\text{フーリエ係数 (区間}[a, b]\text{)} \begin{cases} a_0 = \frac{1}{L} \int_a^b f(x) dx \\ a_n = \frac{1}{L} \int_a^b f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad \dots (2.4') \\ b_n = \frac{1}{L} \int_a^b f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

b) フーリエ余弦級数とフーリエ正弦級数 (フーリエコサイン級数とフーリエサイン級数)

偶関数 : $f(-x) = f(x)$ を満たす関数	代表的な関数	$\cos x \rightarrow \int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx$
奇関数 : $f(-x) = -f(x)$ を満たす関数	代表的な関数	$\sin x \rightarrow \int_{-L}^L f(x) dx = 0$

偶関数と奇関数の和積の性質 :

- [偶関数] × [偶関数] = [偶関数]
- [偶関数] × [奇関数] = [奇関数]
- [奇関数] × [奇関数] = [偶関数]
- a [偶関数] + b [偶関数] = [偶関数] (線形結合、 a, b : 任意の定数)
- a [奇関数] + b [奇関数] = [奇関数] (線形結合、 a, b : 任意の定数)

ただし、([偶関数] + [奇関数] = [分からない]) である。

従って、

- 偶関数のフーリエ級数 : $\cos nx$ の項(a_0, a_n)が残り $b_n = 0$
- 奇関数のフーリエ級数 : $\sin nx$ の項(b_n)のみが残り $a_0 = a_n = 0$

フーリエ余弦級数とフーリエ正弦級数 :

周期 2π の周期関数 $f(x)$ が偶関数または奇関数のいずれかであれば、以下のように簡略化して計算することができる。

$f(x)$ が偶関数のとき、そのフーリエ級数 : $\cos nx$ の項(a_0, a_n)が残り $b_n = 0$ であるから、

フーリエ余弦級数 : 周期 2π の偶関数 $f(x)$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx) \quad \dots (2.5)$$

$$\text{フーリエ係数 (区間}[-\pi, \pi]\text{)} \begin{cases} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

$f(x)$ が奇関数のとき、そのフーリエ級数： $\sin nx$ の項(b_n)のみが残り $a_0 = a_n = 0$ であるから、

フーリエ正弦級数：周期 2π の奇関数 $f(x)$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \sin nx) \quad \dots (2.6)$$

フーリエ係数 (区間 $[-\pi, \pi]$) $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$

【例題 2-1】

図の方形波 (矩形波) のフーリエ級数展開を行え。

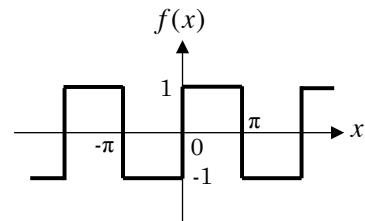


Fig. 2-5 周期 2π の方形波

(解法)

この方形関数 $f(x)$ は周期 2π で、

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x \leq \pi) \\ -1 & (-\pi \leq x \leq 0) \end{cases}$$

となる式で表される。この関数は奇関数なので $a_0 = a_n = 0$ となり、 b_n の項のみを計算する。

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 -1 \cdot \sin nx \, dx + \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin nx \, dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{1}{n} \cos nx \right]_{-\pi}^0 + \left[-\frac{1}{n} \cos nx \right]_0^{\pi} \right) \\ &= \frac{2}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \end{aligned}$$

$\cos n\pi = (-1)^n$ なので、 n が奇数($n = 2m - 1$)では $b_n = 4/n\pi$ であり、 n が偶数では $b_n = 0$ となる。従って、

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2m-1)x}{2m-1} = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right) \quad \dots (2.7)$$

が得られる。ただし、方形波関数のような不連続な関数の場合には、不連続点(この場合には $x = 0$)では等式が成立しない。

【演習問題】

次に示すフーリエ級数を求めよ。(導出の式も書くこと)

(2-1) $f(x) = x \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$

(2-2) $f(x) = |x| \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$

(2-3) $f(x) = x^2 \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$

(2-4) $f(x) = |\sin x| \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$

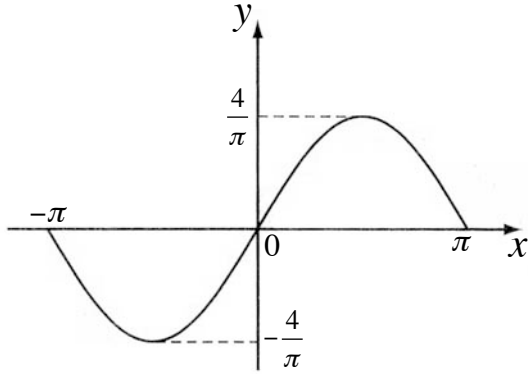
(2-5) $f(x) = \pi - 2x \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$

(2-6) $f(x) = x(\pi - x) \quad (0 \leq x \leq \pi)$

c) フーリエ級数展開により得られた関数のグラフ

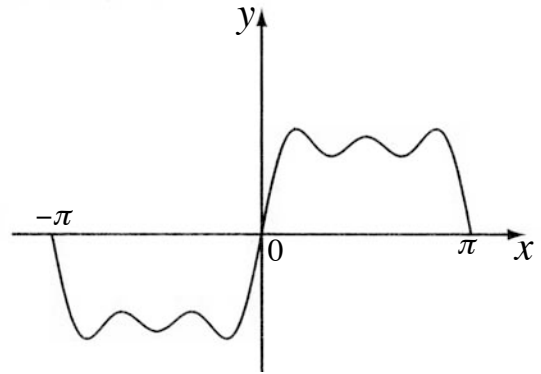
式 (2. 7) の無限級数を n 項 (有限項) までの和で近似して、

$$y = f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^k \frac{\sin(2m-1)x}{2m-1} \text{ として、実際にグラフに表してみると、Fig.2-6 のようになる。}$$



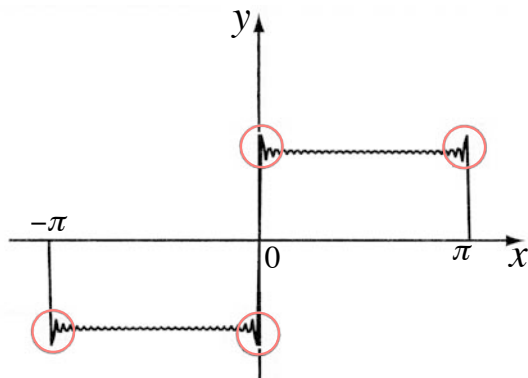
(i) $k = 1$ のとき

$$y = \frac{4}{\pi} \sin x$$



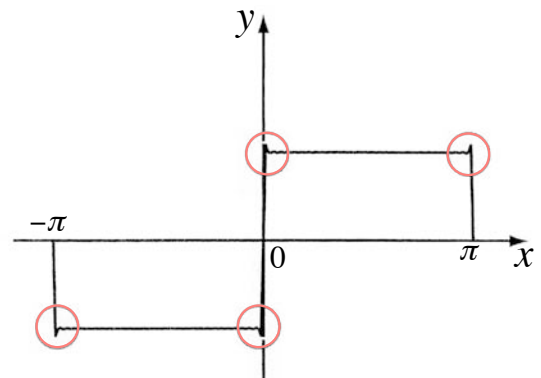
(ii) $k = 3$ のとき

$$y = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} \right)$$



(iii) $k = 30$ のとき

$$y = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \dots + \frac{\sin 59x}{59} \right)$$



(iv) $k = 300$ のとき

$$y = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \dots + \frac{\sin 599x}{599} \right)$$

Fig. 2-6 $f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x \leq \pi) \\ -1 & (-\pi \leq x \leq 0) \end{cases}$ のフーリエ級数展開で得られた

$$y = f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^k \frac{\sin(2m-1)x}{2m-1} \text{ のグラフ}$$

Fig. 2-6 において○で囲んだツノのような形の出現は「ギブス (Gibbs) の現象」と呼ばれるもので、 k の値をさらに大きくしていても現れる。例題 2-1 の方形波は実際には不連続点をもつ方形関数であり、 $(n\pi = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ の不連続点でギブスの現象が現れる。一方で、演習問題(2-2)のように不連続点をもたない三角波を表す関数 (Fig. 2-8) は不連続点を持たないのでギブスの現象は現れない (Fig. 2-10)。

演習問題 (2-1) と (2-2) について、それぞれの $f(x)$ グラフと、フーリエ級数を k 項までの有限項としてグラフに書いてみると、以下のようなになる。

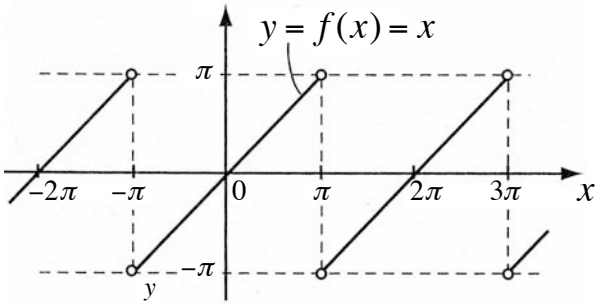


Fig. 2-7 $f(x) = x$ ($-\pi \leq x \leq \pi$)のグラフ

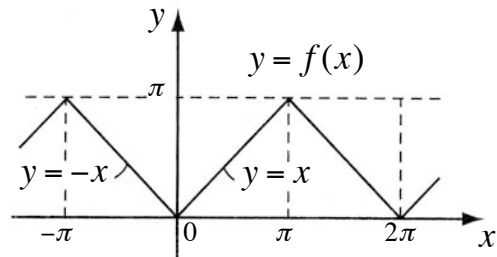


Fig. 2-8 $f(x) = |x|$ ($-\pi \leq x \leq \pi$)のグラフ

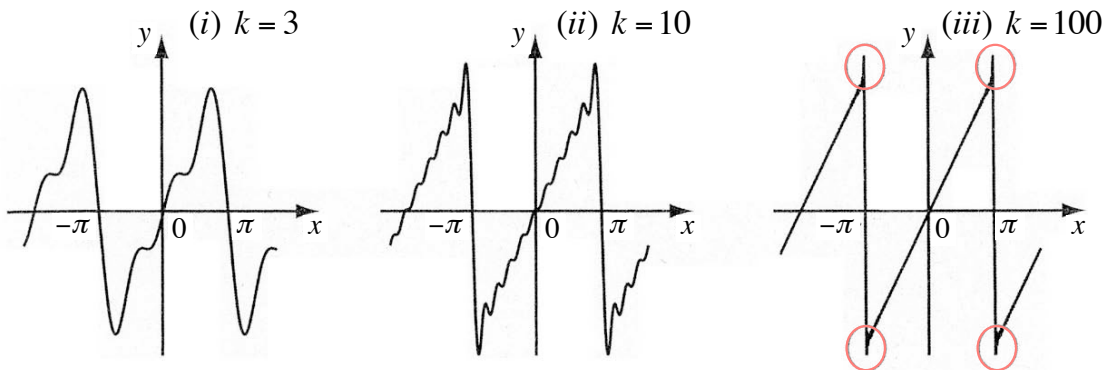


Fig. 2-9 $f(x) = x$ のフーリエ級数を k 項までの和としたグラフ

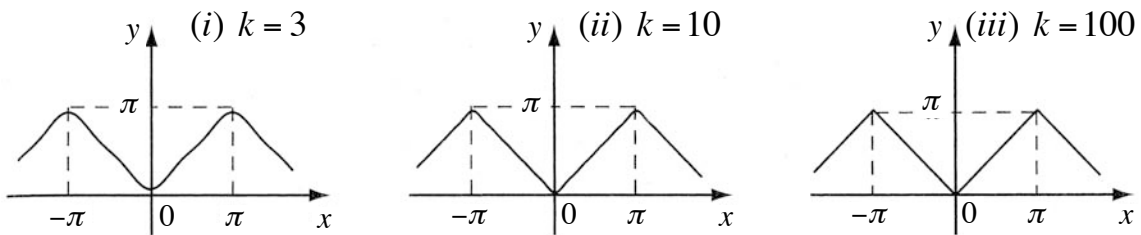


Fig. 2-10 $f(x) = |x|$ のフーリエ級数を k 項までの和としたグラフ

$f(x) = x$ のフーリエ級数では不連続点でギブスの現象が見られるが(Fig. 2-9)、 $f(x) = |x|$ のように不連続点のない連続的な周期関数の場合、ギブスの現象もなくフーリエ級数の収束性(再現性)の良さが現れる(Fig. 2-10)。

フーリエ級数が三角関数の重ね合わせによる近似であるという定義を鑑みると、不連続点をもつ関数 $f(x)$ のフーリエ級数は厳密には等価「=」ではなく、『形式』的に表されることを考慮して以下のように表記され、「 \sim 」が用いられることがあるが、本講義では統一して「=」を用いる。

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

d) 関数の直交性

関数の内積とノルム :

関数 $f(x), g(x)$ に対して下記のような積分が有限値として存在するとき (二乗可積分)、関数の内積 $\langle f, g \rangle$ とノルム (長さ) を次のように定義する

内積	$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g^*(x)dx$... (2. 8)
ノルム	$\ f\ = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \{f(x)\}^2 dx}$... (2. 9)

線形代数において、「0 でないベクトルの内積が 0 のとき、2 つのベクトルが直交する」というのと同様に、「関数 $f(x), g(x)$ の内積 $\langle f, g \rangle$ が 0 のとき、関数 $f(x)$ と $g(x)$ が直交する」という。

($g^*(x)$ は $g(x)$ の共役複素数で、実数関数の場合は $g(x)$ と同じ。)

直交関数系 :

ある関数系 (関数の集合) $\{\phi_0(t), \phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t), \dots\}$ が存在し、この内積に対し互いに直交し、

$$\langle \phi_i(t), \phi_j(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_i(t)\phi_j^*(t)dt = 0 \quad (i, j = 0, 1, 2, \dots; i \neq j)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{\phi_i(t)\}^2 dt \neq 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

であるとき、この関数系を直交関数系という。特に直交関数系のうちノルムが 1 であるものを正規直交関数系という。

三角関数系の直交性 :

フーリエ級数の基となる三角関数系 : $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots\}$ は区間 $[-\pi, \pi]$ (または $[0, 2\pi]$) において直交する。

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos mx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin mx \, dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = 0 \quad (m \neq n), \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = 0 \quad (m \neq n)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0$$

また、

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot 1 \, dx = 2\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx \, dx = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx \, dx = \pi \quad (m \neq 0)$$

であるから、周期関数であることに着目し、区間を新たに $[-\pi, \pi]$ (または $[0, 2\pi]$) 上で定義された二乗可積分関数の空間に対しての内積

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g^*(x)dx \quad \dots (2. 10)$$

を定義すると、自然数 $m, n \geq 1$ に対して、

$$\langle 1, \cos mx \rangle = 0, \quad \langle 1, \sin mx \rangle = 0$$

$$\langle \cos mx, \cos nx \rangle = \begin{cases} 1 & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

$$\langle \sin mx, \sin nx \rangle = \begin{cases} 1 & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

$$\langle \cos mx, \sin nx \rangle = 0$$

$$\langle 1, 1 \rangle = 2$$

このような関係から、三角関数系を正規化する（ノルムを1にする）と

$$\text{正規直交関数系：} \quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots \right\}$$

となる。つまり、式(2.10)より、フーリエ係数の式(2.2)は

$$a_n = \langle f(x), \cos nx \rangle$$

$$b_n = \langle f(x), \sin nx \rangle$$

という計算によって、それぞれフーリエ級数 $\cos nx, \sin nx$ の係数を取り出す操作となっている。

テイラー級数展開との比較：

テイラー級数展開は関数の微分を必要としているので、不連続関数には適用できない。

テイラー級数展開の公式：

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

対して、フーリエ級数展開は周期関数に対するものであるが、微分可能性を必要としないので、(区分的に滑らかな関数であれば)不連続関数にも適用できる。フーリエ (Fourier) は、不連続関数を無限回微分可能な \sin, \cos という滑らかな関数の和で表現しようとした。

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

フーリエ級数の収束性：

本講義では実用的な数学の習得を目的として、厳密な数学的照明は行わないとした。フーリエ級数展について「基本的に周期関数であればどのような関数でも三角関数の重ね合わせ(和)による近似が可能である」ことを天下りの説明して、鵜呑みにさせている。ただし、数学を厳密に扱うことが得意な学生にとってはいささか消化不良を起しそうな部分もあったかもしれない。

三角関数だけで様々な関数の基底は十分なのか？

フーリエ級数は様々な関数と一致できるのか？

例えば3次元を表すには e_x, e_y, e_z のよう3つの基底ベクトルが必要である。もし1本でも基底ベクトルが欠けてしまえば、当然ながら空間内の点を全て表すことは不可能になってしまう。

「三角関数の直交性」は先に示したように、{sin 関数, cos 関数, 定数} は直交関数系の基底関数であった。これら「基底関数」をフルに使うことで、周期関数は「フーリエ級数」によって表されることを示した。しかし、本当に三角関数と定数で全ての基底となっているのだろうか？

もう一歩進んで学習したい学生に、フーリエ級数展開をより数学的に厳密な取り扱いをするための入り口となるキーワードについて下記に示す。

→フーリエ級数は様々な関数と一致することを証明する「**ディリクレ核**」

→関数が区分的に連続であるという必要条件とする様々な関数は周波数無限大の基底関数を持たないことを証明する「**リーマン・ルベーグの定理**」

フーリエ級数展開可能な周期関数 $f(x)$ の条件 :

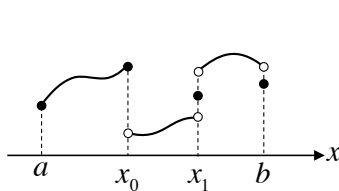
本講義では、フーリエ級数展開される周期関数について特に条件などを説明してこなかった。
 厳密にはフーリエ級数展開できるのは、“区分的に滑らかな”周期関数が、不連続点を除いて
 (「ギブスの現象」の説明を参照) フーリエ級数で表される。

区分的に連続な関数

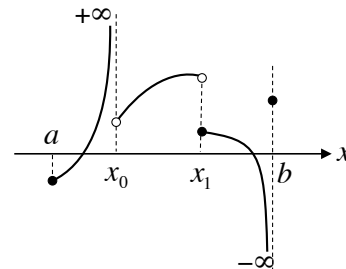
区間 $[a, b]$ で定義された関数 $f(x)$ が、有限個の点を除いて (= 数学の表現として “区分的に”) 連続で、かつ、いずれの不連続点 x_0, x_1, x_2, \dots においても左側極限值 $\lim_{x \rightarrow x_i - 0} f(x)$ と右側極限值

$\lim_{x \rightarrow x_i + 0} f(x)$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) が存在し、さらに、両端点においても右側極限值 $\lim_{x \rightarrow a + 0} f(x)$ と左側極

限值 $\lim_{x \rightarrow b - 0} f(x)$ が存在するとき、 $f(x)$ を区間 $[a, b]$ で “区分的に連続な関数” という。



区分的に連続な関数 $f(x)$ のイメージ



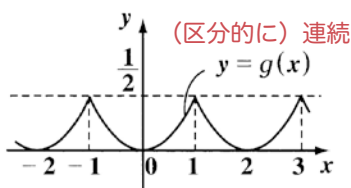
区分的に連続でない関数 $f(x)$ のイメージ

区分的に滑らかな関数

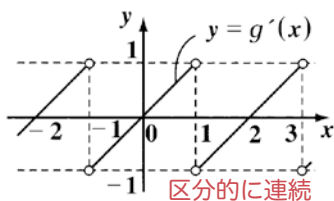
区間 $[a, b]$ で定義された関数 $f(x)$ と、その 1 階導関数 $f'(x)$ が共に区分的に連続であるとき、 $f(x)$ を区間 $[a, b]$ で “区分的に滑らかな関数” という。

ただし、 $f(x)$ に不連続点や尖点がある場合、 $f'(x)$ はそれらの点を除いて考える。
 (当然ながら、不連続点や尖点では微分不可能である。)

(i) $g(x) = \frac{1}{2}x^2 \quad (-1 < x \leq 1)$

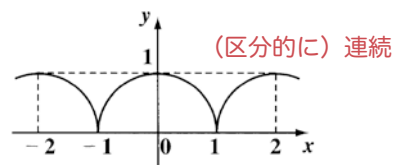


(ii) $g'(x) = x \quad (-1 < x < 1)$

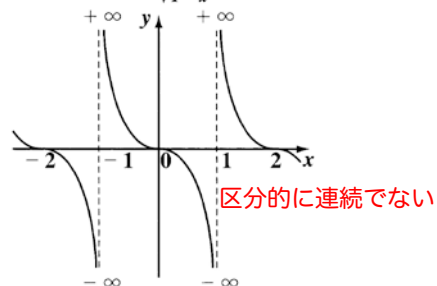


区分的に滑らかな関数のイメージ
 [微分(ii)しても区分的に連続である]

(i) $h(x) = \sqrt{1-x^2} \quad (-1 < x \leq 1)$



(ii) $h'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$



区分的に滑らかでない関数のイメージ
 [微分(ii)すると区分的に連続ではない]

“区分的に滑らか”であるためには、“区分的に連続”であることが必要となる。

2-3. フーリエ級数の微分と積分

a) フーリエ級数の微分

フーリエ級数の微分：

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad \text{について項別微分が許されるとすれば}$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \sin nx + nb_n \cos nx) \quad \dots (2.11)$$

フーリエ級数の微分は、各項の \sin, \cos を交換し、係数に n を掛けていく単純な操作で与えられる。ただし、以上の様に項別微分が可能な場合もあるが、関数に不連続点がある場合には、収束せずに微分不可能となる。

【例題 2-2】

$f(x) = x^2 \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$ のフーリエ級数展開を項別微分し、微分関数のフーリエ級数と比較せよ。

(解法)

$f(x) = x^2 \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$ のフーリエ級数は、

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos nx \right\}$$

であるが、両辺を項別微分して x についての式にすると、

$$x = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^n \frac{1}{n} \sin nx \right\} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また、 $f(x)$ の微分関数は $f'(x) = 2x$ であり、演習問題(2-1)より $g(x) = x$ をフーリエ級数展開すると、

$$g(x) = x = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^n \frac{1}{n} \sin nx \right\} \quad \dots \textcircled{2}$$

であるから、①式と②式は一致する。

項別微分が不可能な例)

不連続点をもつ $f(x) = x \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$ (Fig. 2-7) で説明する。 $f(x) = x$ のフーリエ展開は

$$x = 2 \left(\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \dots - \frac{1}{2n} \sin 2nx + \dots \right) \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

となる。この両辺を微分すると

$$x = 2(\sin x - \sin 2x + \sin 3x - \sin 4x + \dots)$$

が得られる。区間 $[-\pi, \pi]$ での 1 つの値 $x = \pi/2$ を代入すると

$$1 = 2 \times (0 - 1 + 0 - 1 + \dots)$$

また、 $x = 0$ を代入すると

$$1 = 2 \times (1 - 1 + 1 - 1 + \dots)$$

となり、両方とも発散する。つまり項別微分が不可能である。

b) フーリエ級数の積分

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

について0からxまで不定積分を考える。

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_0^x dx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \int_0^x \cos nx dx + b_n \int_0^x \sin nx dx) \\ &= \frac{a_0}{2} x + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_n}{n} \sin nx - \frac{b_n}{n} (\cos nx - 1) \right\} \end{aligned}$$

となる。これから、周期関数の部分のみを示すと以下のようになる。

フーリエ級数の積分：

$$F_0 = F(x) - \frac{a_0}{2} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_n}{n} \sin nx - \frac{b_n}{n} \cos nx \right\} \quad \dots (2. 1 2)$$

【例題 2-3】

$f(x) = x$ ($-\pi \leq x \leq \pi$)のフーリエ級数展開を項別積分し、積分関数のフーリエ級数と比較せよ。

(解法)

$$f(x) = x \text{ のフーリエ級数は、 } x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^n \frac{1}{n} \sin nx \right\} \text{ であるが、両辺を項別積分すると、}$$

$$\frac{x^2}{2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^n \frac{1}{n^2} \cos nx \right\} + c$$

となる。積分定数cは、 $\frac{x^2}{2}$ のフーリエ級数の定数項 a_0 と等しいので、式(2・1)より

$$c = \frac{a_0'}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{2} dx = \frac{\pi^2}{6}$$

と置けば、 $f(x) = \frac{x^2}{2}$ のフーリエ級数展開と一致する。

【演習問題】

次に示す関数のフーリエ級数展開を項別微分または積分し、微分関数のフーリエ級数と比較せよ。

(導出の式も書くこと)

(2-7) $f(x) = |\sin x|$ ($-\pi \leq x \leq \pi$)の微積分

(2-8) $f(x) = x(\pi - x)$ ($0 \leq x \leq \pi$)の微分

(2-9) $f(x) = x^2$ ($-\pi \leq x \leq \pi$)の積分

2-4. 複素フーリエ級数

a) 複素フーリエ級数

オイラーの公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, e^{-ix} = \cos x - i \sin x \quad \text{より、}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = -\frac{i(e^{ix} - e^{-ix})}{2} \end{array} \right. \quad \dots (2.13)$$

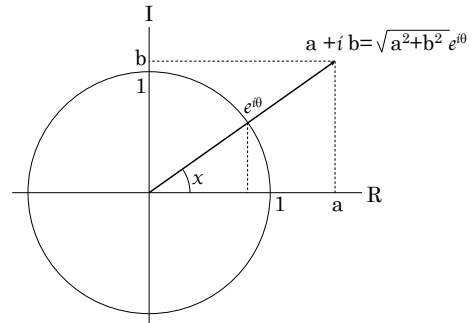


Fig. 2-11 単位円と複素数の極表示

であるから、式 (2.13) を式 (2.1) に代入して書き直すと、

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{inx} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-inx} \right\} \quad \dots (2.14)$$

ここで、以下のように定義すれば、

$$\text{複素フーリエ係数: } c_0 = \frac{a_0}{2}, c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \quad \dots (2.15)$$

式 (2.1)、(2.2') との対応から複素フーリエ係数は、

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)e^{inx} dx$$

以上より、

周期 2π の周期関数の複素フーリエ級数の式

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad \dots (2.16) \\ c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx} dx \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots) \quad \dots (2.17) \end{array} \right.$$

(c_n と c_{-n} は、共役複素数の関係にあるので、通常 c_{-n} について計算する必要はない)

周期 T の周期関数 $f(t)$ の複素フーリエ級数の式

$$\left\{ \begin{array}{l} f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \quad \dots (2.18) \\ c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)e^{-in\omega t} dt \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots) \quad \dots (2.19) \end{array} \right.$$

ここで、周期 T での周波数は $1/T$ 、角周波数は $\omega = 2\pi/T$ で定義される

【例題 2-4】

$f(t) = A \sin(\pi t/T)$ ($0 < t < T$, $f(t+T) = f(t)$)は、Fig. 2-12 に示すような交流電源をサイリスタ整流器で直流に変換した場合に得られるタイプの関数である。この関数の複素フーリエ級数を求めよ。

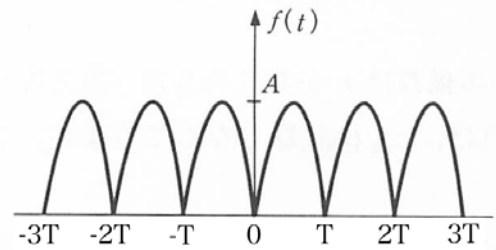


Fig. 2-12 整流された正弦波間周期関数

(解法)

周期 T での周波数は $1/T$ 、角周波数は $\omega = 2\pi/T$ で定義されるとき、複素フーリエ級数は、

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^{-in\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T A \sin\left(\frac{\omega t}{2}\right) \cdot e^{-in\omega t} dt$$

$$= \frac{A}{T} \int_0^T \frac{e^{i\omega t/2} - e^{-i\omega t/2}}{2i} \cdot e^{-in\omega t} dt$$

$$= \frac{A}{2iT} \left[\frac{e^{-i\omega(n-1/2)t}}{-i\omega \cdot (n-1/2)} - \frac{e^{-i\omega(n+1/2)t}}{-i\omega \cdot (n+1/2)} \right]_0^T$$

$$= \frac{-2A}{\pi \cdot (4n^2 - 1)}$$

よって、

$$f(x) = -\frac{2A}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cdot e^{in\omega t}$$

念のため c_0 も計算してみると

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T A \sin\left(\frac{\omega t}{2}\right) dt = -\frac{A}{T} \left[\frac{\cos(\omega t / 2)}{\omega / 2} \right]_0^T = \frac{2A}{\pi}$$

c_n に $n=1$ を代入した結果と一致する。→つまり、 c_0 は計算不要である。

サイリスタ :

電車などのモーターは直流電動機を使う。加速性能が高く、出力が大きいからである。電源は交流であるから、電車には「サイリスタ」という整流器が設備してあり、交流を直流に変換する。

【演習問題】

(2-10) a を整数以外の実数とする関数 $f(x) = e^{iax}$ ($-\pi < x < \pi$) を複素フーリエ級数に展開せよ。

b) 直交関数系

$e^{in\omega t}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) は以下の内積の式を用いて $0 \leq t \leq T$ の範囲で直交関数系をなす。

$$\frac{1}{T} \int_0^T e^{im\omega t} e^{-in\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T e^{i(m-n)\omega t} dt = \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \dots (2. 20)$$

δ_{nm} クロネッカーのデルタ

c) パーシバル(Parseval)の等式

関数 $f(x)$ が二乗可積分関数ならばパーシバルの等式が成り立つ。

$$\frac{1}{T} \int_0^T \{f(t)\}^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2$$

ところで、式 (2. 15) より

$$c_0^2 = \frac{1}{4} a_0^2, c_n = \frac{1}{2} (a_n - ib_n), c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + ib_n) \text{ であるから、}$$

式 (2. 16) の右辺は $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 = \frac{1}{4} a_0^2 + 2 \times \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ となり、

$$\frac{1}{T} \int_0^T \{f(t)\}^2 dt = \frac{1}{4} a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \text{ が成立する。}$$

パーシバルの等式：

$$\frac{1}{T} \int_0^T \{f(t)\}^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 = \frac{1}{4} a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \dots (2. 21)$$

周期 T の区間で任意に積分区間をとれるので、積分区間 $[0, T]$ は $[-T/2, T/2]$ としても良い。

【演習問題】

(2-11) パーシバルの等式と $f(x) = x^2$ ($-\pi < x < \pi$) のフーリエ級数を用いて、以下の式を証明せよ。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

d) 線形システム

入力関数を $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ とした場合、それぞれの出力関数が $F_1(t), F_2(t), \dots, F_n(t)$ であるとする。このとき、

$$f(t) = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + \dots + a_n f_n(t) + \dots$$

で与えられる関数が

$$F(t) = a_1 F_1(t) + a_2 F_2(t) + \dots + a_n F_n(t) + \dots$$

として出力される場合、そのシステムは線形であるという。

この性質を利用すると、フーリエ級数の各項を個別に取り出して計算できる。

物理現象には幾つかの現象が「線形」的に組み合わせられていることが多くある。例えば、音色は複数の周波数の音の「線形」的な組み合わせであるし、電気回路における R, L, C の各回路要素は「線形」的に振る舞う。

周期関数を簡単な周期関数(sin, cos 関数)の和で表現する計算手法であるフーリエ級数展開は、数学的に線形の関数方程式で記述されるシステム(→線形システム)であることは容易に理解できるであろう。これを利用することによって、フーリエ級数の各項を個別に取り出して計算することによって、周期波の展開を容易にしている。

このように、線形システム化した数学的操作について、次章以降で説明するフーリエ変換は非周期波の周波数分析、ラプラス変換は過渡現象の解析など、物理現象の解析を簡略化できる。

【例題 2-5】

例題 2-4 で求めた全波整流関数を Fig. 2-13 (b) に示す直列 RLC 回路に入力した場合、回路内の電荷はどのような関数で与えられるか求めよ。

ただし、直列 RLC の回路方程式はキルヒホッフの法則により

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = V$$

で示される線形システムである。

ここで、 L : インダクタンス、 R : 抵抗、 C : 静電容量である。

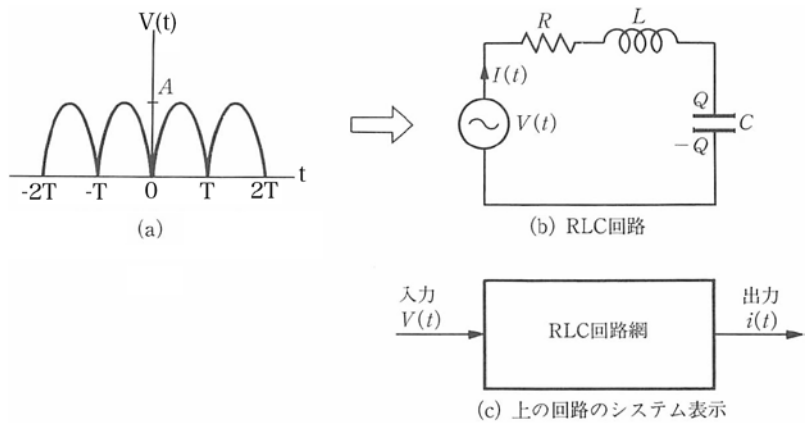


Fig. 2-13 直列 RLC 回路

(解法)

全波整流関数の印加電圧 $V(t)$ は例題 2-4 の答えより、

$$V(x) = -\frac{2A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cdot e^{imot}$$

回路方程式の線形性から、 $Q(t)$ および $V(t)$ のフーリエ級数における n 成分のみの関係式は、

$$L \frac{d^2(Q_n \cdot e^{imot})}{dt^2} + R \frac{d(Q_n \cdot e^{imot})}{dt} + \frac{1}{C} (Q_n \cdot e^{imot}) = V_n \cdot e^{imot}$$

$$(-n^2\omega^2L + in\omega R + \frac{1}{C})Q_n = V_n$$

$$Q_n = \frac{CV_n}{1 - n^2\omega^2LC + in\omega RC} = -\frac{2AC}{\pi} \cdot \frac{1}{(4n^2 - 1)(1 - n^2\omega^2LC + in\omega RC)}$$

$$Q(t) = -\frac{2AC}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)(1 - n^2\omega^2LC + in\omega RC)} \cdot e^{in\omega t}$$

分母の複素数表示を極形式に直し、

$$(1 - n^2\omega^2LC) + in\omega RC = \sqrt{(1 - n^2\omega^2LC)^2 + (in\omega RC)^2} \cdot e^{i\theta}$$

$Q(t)$ の式に代入すると、

$$Q(t) = -\frac{2AC}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)\sqrt{(1 - n^2\omega^2LC)^2 + (in\omega RC)^2}} \cdot e^{i(n\omega t - \theta)}$$

ただし、 $\tan\theta = \frac{n\omega RC}{1 - n^2\omega^2LC}$ θ : 偏角

この実数部分のみを見ると、

$$Q(t) = -\frac{2AC}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)\sqrt{(1 - n^2\omega^2LC)^2 + (in\omega RC)^2}} \cdot \cos(n\omega t - \theta) \text{ となる。}$$

【演習問題】

(2-12) Fig. 2-14 に示す機械システムを考える。この場合、システムに $F(t) = f \cos \omega t$ の力を入力した場合の変位関数 $X(t)$ を導出せよ。

ただし、運動方程式は

$$m \frac{d^2X}{dt^2} + \gamma \frac{dX}{dt} + kX = F$$

で与えられる。ここで、 m : 重りの質量、 γ : ダッシュポットの粘性係数、 k : ばね定数である。

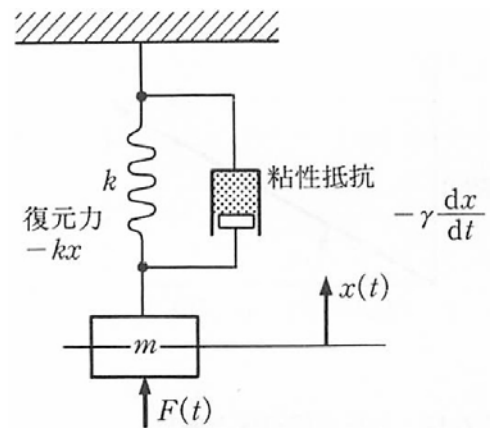


Fig. 2-14 抵抗を受けるばね振り子

2-5. 単位階段関数とデルタ関数 (フーリエ変換、ラプラス変換を学ぶ前に・・・)

a) デルタ関数

Fig. 2-15 に示すように、正の定数 n に対して、 $(-n \leq x \leq n)$ のときのみ $1/2n$ の値をとり、それ以外は 0 となる方形関数を考える。

$$\delta_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2n} & (-n \leq x \leq n) \\ 0 & (x < -n, n < x) \end{cases}$$

ここで、この関数の面積 (長方形の面積) は n が変化しても常に $2n \times \frac{1}{2n} = 1$ となって一定である。

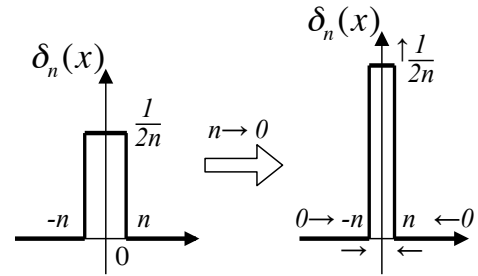


Fig. 2-15 面積 1 の方形関数

$n \rightarrow 0$ の極限をとったとき、Fig. 2-16 のように $x = 0$ のときのみ ∞ となり、それ以外は全て 0 の値をとる。このような特殊な関数 (超関数) をデルタ関数と定義する (ディラックのデルタ関数)。

デルタ関数の定義 :

$$\delta(x) = \lim_{n \rightarrow 0} \delta_n(x) = \begin{cases} \infty & (x = 0) \\ 0 & (x \neq 0) \end{cases} \quad \dots (2. 2 2)$$

デルタ関数は、例えば電気回路における瞬間的パルスや機械システムにおける衝撃波に対応し、単位インパルスとも呼ぶ。

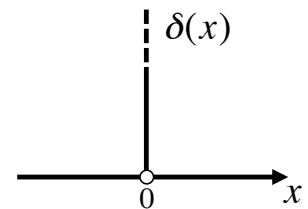


Fig. 2-16 デルタ関数 (単位インパルス関数)

デルタ関数の特徴

特徴 1 : $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$ (線で描かれるのに、面積は1) $\dots (2. 2 3)$

特徴 2 : $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0)$ $\dots (2. 2 4)$

デルタ関数は、 $x = a$ のとき ∞ となる場合でもよく、次のように示される。

デルタ関数の定義 2 :

$$\delta(x - a) = \begin{cases} \infty & (x = a) \\ 0 & (x \neq a) \end{cases} \quad \dots (2. 2 5)$$

デルタ関数の特徴 2

特徴 1 : $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) dx = 1$ (面積 : 1) $\dots (2. 2 6)$

特徴 2 : $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a)$ $\dots (2. 2 7)$

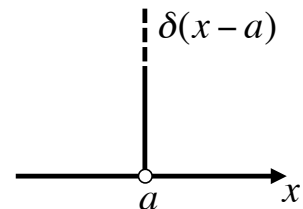


Fig. 2-17 デルタ関数

【例題 2-6】

デルタ関数が周期 T で配列した周期的デルタ関数(単位インパルス列)のフーリエ級数を求めよ。ただし、周期 T の周期的デルタ関数は次式で与えられる。

$$\delta_T(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nT) \quad \dots (2.28)$$

(解法)

フーリエ三角級数における第1項は、

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(x) dx = \frac{2}{T}$$

本関数は偶関数なので、

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(x) \cos n\omega x dx = \frac{2}{T} \cos 0 = \frac{2}{T}$$

従って、フーリエ級数展開は

$$\delta_T(x) = \frac{1}{T} + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{2\pi nx}{T} \quad \dots (2.29)$$

によって与えられる。

b) 単位階段関数

単位階段関数 $u(x)$ とデルタ関数 $\delta(x)$ の関係を理解する前段階として、次に示す関数 $u_n(x)$ とデルタ関数の説明で用いた面積1の方形関数 $\delta_n(x)$ を考える。

$$\delta_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2n} & (-n \leq x \leq n) \\ 0 & (x < -n, n < x) \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$u_n(x) = \int_{-\infty}^x \delta_n(t) dt \quad \dots \textcircled{2}$$

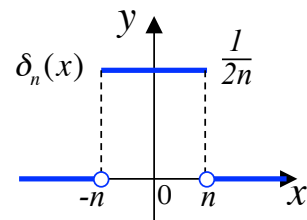


Fig. 2-18 方形関数 $\delta_n(x)$

②で定義される関数 $u_n(x)$ は、次のように3通りに場合分けして求めると、

(i) $x < -n$ のとき、

$$u_n(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$$

(ii) $-n \leq x \leq n$ のとき、

$$u_n(x) = \int_{-\infty}^{-n} 0 dt + \int_{-n}^x \frac{1}{2n} dt = 0 + \frac{1}{2n} [t]_{-n}^x = \frac{1}{2n} x + \frac{1}{2}$$

(iii) $n < x$ のとき、

$$u_n(x) = \int_{-\infty}^{-n} 0 dt + \int_{-n}^n \frac{1}{2n} dt + \int_n^x 0 dt = 0 + 1 + 0 = 1$$

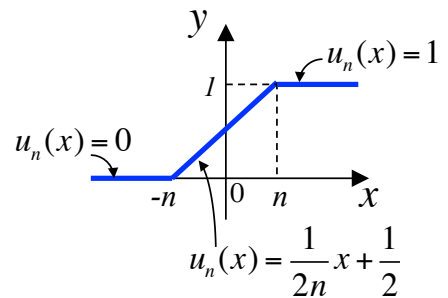


Fig. 2-19 関数 $u_n(x)$

よって、 $u_n(x)$ は Fig. 2-19 で表されるようなグラフになる。

ここで、 $r \rightarrow +0$ の極限をとったとき、①の方形関数 $\delta_n(x)$ は $x = 0$ のときのみ $+\infty$ となりそれ以外はすべて0の値をとるデルタ関数 $\delta(x)$ となる。デルタ関数の特徴 (2. 2 3) 式より、 $r \rightarrow +0$ のとき、 $u_n(x)$ は $x < 0$ のとき0、 $0 < x$ のとき1となる"単位階段関数" $u(x)$ になる。

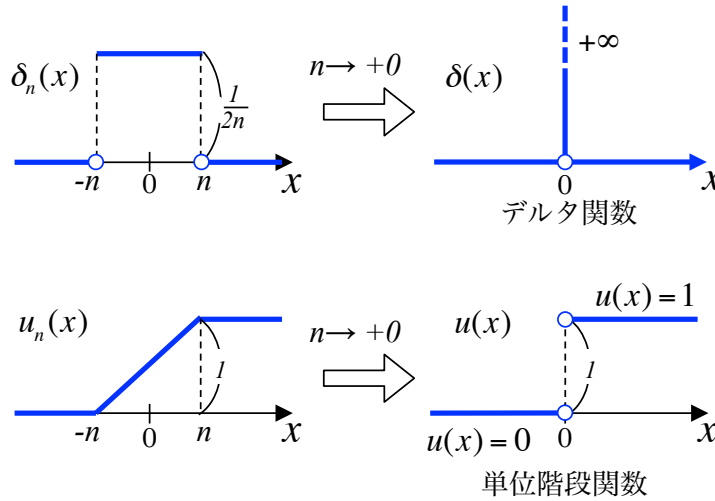


Fig. 2-20 デルタ関数 $\delta(x)$ と単位階段関数 $u(x)$

デルタ関数と同様に、単位階段関数も、 x 軸方向に a だけ平行移動して次のように定義できる。

単位階段関数の定義：

$$u(x - a) = \begin{cases} 1 & (a < x) \\ 0 & (x < a) \end{cases} \quad \dots (2. 3 0)$$

特に $a = 0$ のとき、この単位階段関数のことをヘビサイド(Heaviside)関数とも呼ばれる。

単位階段関数とデルタ関数との関係

$$u(x - a) = \int_{-\infty}^x \delta(t - a) dt \quad \dots (2. 3 1)$$

$$\frac{d}{dx} u(x - a) = \delta(t - a) \quad \dots (2. 3 2)$$

Fig. 2-21 単位階段関数

デルタ関数と単位階段関数は、後のフーリエ変換やラプラス変換だけでなく、任意の関数とかけ合わせて、任意の点や領域を抽出できるなど、便利な使い方が多くあるので、是非覚えておきたい。